

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет

Лабораторна робота № 1-5
**Визначення коефіцієнта в'язкості
рідини методом Стокса**

Виконана студ. групи _____

Київ-2025

Лабораторна робота 1-5

Визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса

Мета роботи: вивчення руху матеріальної точки під дією сили, що пропорційна швидкості; визначення коефіцієнта в'язкості гліцерину. Ця мета досягається при вимірюванні часу, за який свинцеві кульки проходять у гліцерині певну відстань.

Обладнання: скляний циліндр із рідиною, в'язкість якої досліджується (гліцерин), термометр, ареометр, мікрометр, секундомір, масштабна лінійка, дрібні кульки.

5.1. Теоретичні відомості

На рухоме тіло у в'язкій рідині діє сила опору, яка залежить від багатьох факторів таких як геометричної форми тіла, характеру обтікання, коефіцієнта в'язкості рідини тощо. Характер обтікання тіла рідиною визначається числом Рейнольдса (Re).

При великих значеннях Re обтікання стає турбулентним з утворенням вихорів позаду тіла. У вихровій області тиск знижений, у результаті чого виникає різниця тисків між передньою та задньою поверхнями тіла, що обумовлює силу опору. Таким чином, повна сила опору складається з опору тертя та опору тиску, а їх відносний внесок визначається значенням числа Re . Обтікання буде ламінарним за виконання умови:

$$Re < Re_{кр}, \quad (5.1)$$

де $Re_{кр}$ – критичне значення числа Рейнольдса, яке залежить від рідини і його величина коливається від десятків до декількох тисяч. Сила опору F_c , що діє під час обтікання кульки безмежною в'язкою рідиною з густиною ρ_1 , при виконанні нерівності

$$Re = \frac{vr\rho_1}{\eta} \ll 1, \quad (5.2)$$

визначається формулою Стокса¹:

$$F_c = 6\pi r\eta v, \quad (5.3)$$

де η – коефіцієнт в'язкості рідини, v – швидкість кульки, r – її радіус,

Критерій (5.2) забезпечує не лише застосування формули Стокса, а й ламінарність обтікання, тому що у цьому випадку, безперечно, виконується також умова (5.1). Практично, це відповідає повільному обтіканню кульки в'язкою рідиною або її повільному русі.

З'ясуємо характер руху кульки маси m під час повільного падіння у безмежній в'язкій рідині. У цьому випадку на неї діють три сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила Архімеда (виштовхувальна сила) \vec{F}_A та сила опору \vec{F}_c , як показано на рис.5.1. Згідно з другим законом Ньютона:

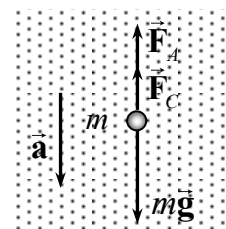


Рис. 5.1

¹ Цю формулу простіше запам'ятати, користуючись мнемонічним правилом «шість піруетів».

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_C + \vec{F}_A,$$

де \vec{a} – прискорення кульки. Проектуючи це рівняння на напрям вектора прискорення, одержимо:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A - F_C,$$

або

$$\rho V \frac{dv}{dt} + 6\pi r \eta v = Vg(\rho - \rho_1), \quad (5.4)$$

де ρ – густина матеріалу кульки, V – її об'єм.

Для того, щоб розв'язати рівняння (5.4) перепишемо його таким чином:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi r \eta}{\rho V} \left[v - \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r \eta} \right], \quad (5.5)$$

зауваживши при цьому, що величина

$$B = \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r \eta} \quad (5.6)$$

не залежить від часу і має розмірність швидкості. Це дозволяє рівняння (5.5) у вигляді диференційного рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{d(v - B)}{dt} = -\frac{6\pi r \eta}{\rho V} (v - B), \quad (5.7)$$

або

$$\frac{d(v - B)}{v - B} = -\frac{6\pi r \eta}{\rho V} dt. \quad (5.8)$$

Його інтегрування дає

$$\ln(v - B) = -\frac{6\pi r \eta}{\rho V} t + \ln C, \quad (5.9)$$

де довільна стала записана у вигляді $\ln C$. Позбавившись від логарифма, маємо:

$$v(t) = C e^{-\frac{6\pi r \eta}{\rho V} t} + B. \quad (5.10)$$

Таким чином, залежність швидкості руху кульки від часу $v(t)$ визначається за формулою:

$$v(t) = C e^{-\frac{6\pi r \eta}{\rho V} t} + \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r \eta}. \quad (5.11)$$

Довільна стала C визначається початковою швидкістю, з якою кулька потрапляє у рідину, тобто з умови

$$v(t = 0) = v_0. \quad (5.12)$$

(Відлік часу, природно, ведеться від моменту перетину кулькою поверхні рідини).

Використовуючи загальний розв'язок (5.11) та умову (5.12), визначаємо, що

$$C = v_0 - \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r\eta}. \quad (5.13)$$

Остаточно

$$v(t) = \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r\eta} - \left[\frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r\eta} - v_0 \right] e^{-\frac{6\pi r\eta}{\rho V} t}. \quad (5.14)$$

Проаналізуємо розв'язок (5.14). При $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow v_{уст} = \frac{Vg(\rho - \rho_1)}{6\pi r\eta}$ – усталена швидкість руху. Умова $t \rightarrow \infty$ з фізичної точки зору означає, що $t \gg \tau$, де $\tau = \rho V / 6\pi r\eta$ – так званий **час релаксації**, тобто час, за якого рух набуде усталеного характеру ($a = 0$)

Використовуючи прийняті позначення, запишемо розв'язок (5.14) у більш зручному вигляді:

$$v(t) = v_{уст} - (v_{уст} - v_0) e^{-t/\tau}. \quad (5.15)$$

Графік цієї функції, зображений на рис.5.2, дає наочне уявлення про характер руху кульки.

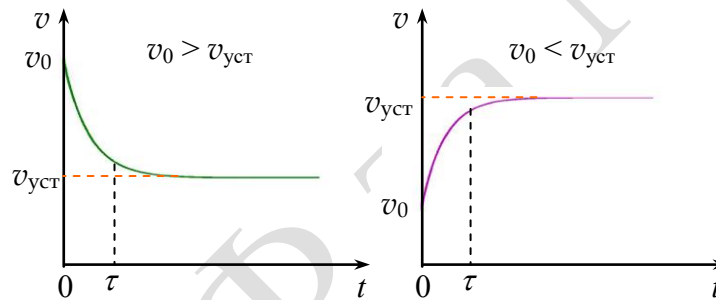


Рис. 5.2

Таким чином, незалежно від швидкості v_0 , з якою кулька потрапляє до рідини, через час $t \gg \tau$ з достатньою точністю можна говорити далі про рівномірний рух кульки зі швидкістю $v_{уст}$.

Задача 1. Покажіть, що за $t = 3\tau$ відхилення швидкості кульки від усталеної швидкості складає $\sim 5\%$, тобто визначить $\frac{v_{уст} - v(3\tau)}{v_{уст}}$, вважаючи, що кульку відпускають, коли вона торкається поверхні рідини, тобто $v_0 = 0$.

Вимірявши усталену швидкість падіння кульки $v_{уст}$ та знаючи її радіус, а також величини густин речовини кульки ρ та рідини ρ_1 , можна обчислити коефіцієнти в'язкості рідини за формулою

$$\eta = \frac{2}{9} gr^2 \frac{\rho - \rho_1}{v_{уст}}. \quad (5.16)$$

У цьому полягає ідея методу Стокса.

У роботі пропонується визначити коефіцієнт в'язкості гліцерину. Гліцерин відносять до рідин, коефіцієнт в'язкості яких має значну температурну залежність при температурах, близьких до кімнатної.

Окрім того, у реальному експерименті мають справу з водним розчином гліцерину, тому що на повітрі він поглинає водяну пару. Наявність води значно позначається на його густині та в'язкості. Уявлення про ступінь залежності в'язкості від температури та відсоткового складу гліцерину у розчині дають літературні дані, наведені у таблиці 5.1. Вимірювати в'язкість гліцерину, не знаючи його температури та густини (відсоткового вмісту води), немає ніякого сенсу.

Таблиця 5.1

Розчин гліцерину водний			
Вміст гліцерину, масові відсотки	В'язкість η , 10^{-3} Па·с		
	20 °C	25 °C	30 °C
100	1495,0	942,0	622,0
99	1194,0	772,0	509,0
98	971,0	627,0	423,0
97	802,0	521,0	353,0
96	659,0	434,0	295,0
95	543,0	365,0	248,0

5.2. Методика експерименту

Експериментальна установка досить проста – скляна циліндрична посудина, заповнена гліцеином. Діаметр посудини ≈ 5 см, довжина ≈ 1 м. На стінках посудини нанесено позначки, відстань між ними l вимірюється за допомогою лінійки. Верхня позначка розташована трохи нижче відкритої поверхні гліцерину. На момент її проходження швидкість кульки встигає набрати усталеного значення.

Час t руху кульки між позначками вимірюється секундоміром, що дозволяє визначити $v_{уст}$ за формулою:

$$v_{уст} = \frac{l}{t}. \quad (5.17)$$

З'ясуємо, якого розміру кульки належить використати для вимірювань.

Задача.2. Використовуючи умови застосовності формули Стокса (5.2) покажіть, що вимірювання можна проводити з кульками, радіус яких

$$r^3 \ll \frac{9}{2} \frac{\eta^2}{(\rho - \rho_1)\rho_1 g}. \quad (5.18)$$

Візьміть для розрахунків свинцевий кульку ($\rho = 11,3 \cdot 10^3$ кг/м³) радіусом $r = 1$ мм. Чи можна з його допомогою вимірювати коефіцієнт в'язкості, наприклад, 95% розчину гліцерину при температурі 20 °C? Покладіть $\rho_1 = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³.

Необхідно також визначити, на якій відстані нижче відкритої поверхні гліцерину повинна знаходитись верхня позначка, щоб на момент її проходження $v(t) \approx v_{уст}$, (наприклад, з 5% точністю). Для цього визначте шлях S , що проходить кулька за час 3τ з

нульовою початковою швидкістю. Якщо проінтегрувати вираз (5.15) по часу від 0 до 3τ , то отримаємо:

$$S(3\tau) = \int_0^{3\tau} v(t) dt = v_{\text{уст}} \cdot \tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Big|_0^{3\tau} \approx 2v_{\text{уст}} \cdot \tau \approx \frac{8}{81} gr^4 \frac{\rho(\rho - \rho_1)}{\eta^2}.$$

Розрахуйте цю відстань для попереднього прикладу.

Природно, напрошується питання – як слід проводити експеримент з визначення коефіцієнта в'язкості “невідомої рідини” (якщо ми не маємо жодних уявлень про її коефіцієнт в'язкості). Часто у таких випадках студенти проводять серію вимірювань $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ та визначають середній коефіцієнт в'язкості $\langle \eta \rangle$, зовсім не замислюючись про правомірність такого усереднення.

Яке було б ваше ставлення до отриманого у такий спосіб експериментального значення $\langle \eta \rangle$, якби виявилось, що критерій застосовності формули Стокса не виконується? Імовірно, скептичне. Ситуація може здатися надуманою. Однак це не так. Під час формального, точніше кажучи, безграмотного підходу до експерименту результат міг би бути саме таким.

Як ви поставитесь до цього результату, якщо з'ясується, що значення $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ містять систематичну залежність (закономірність), наприклад, від радіуса кульки r ?

Це приклад неправильно проведеного експерименту, хоч і бездоганного у вимірах, розрахунках. У цьому випадку необхідно проводити подальші вимірювання, використовуючи більш дрібні кульки, збільшуючи відстань верхньої позначки від відкритої поверхні гліцерину.

Критерієм надійності експерименту є відсутність систематичної залежності η від r ; ця залежність може носити тільки випадковий характер, пов'язаний з випадковими похибками. **Тільки у цьому разі можна усереднювати результати вимірювань** та робити висновки щодо справедливості теоретичних положень.

Порядок виконання роботи

1. Відберіть 10 кульок різного діаметра і за допомогою мікрометра декілька разів виміряйте діаметри кожної кульки. За цими даними обчисліть середнє значення діаметрів кожної кульки. Густина матеріалу кульок ρ і гліцерину ρ_1 вказано на робочому столі.
2. Якщо густину ρ_1 не вказано, виміряйте її за допомогою ареометра, попередньо перемішавши гліцерин мішалкою. Визначте також температуру гліцерину.
3. Використайте дані таблиці 5.1 та проаналізуйте застосовність формули Стокса. З'ясуйте, на якій відстані від відкритої поверхні гліцерину слід установлювати верхню позначку. Для розрахунків використовуйте “найгірші” значення r і η , тобто максимальний радіус відібраних кульок і в'язкість 95% розчину гліцерину при кімнатній температурі. Якщо ця відстань виявиться надто малою, візьміть до уваги практичні міркування.
4. Взявши кульку пінцетом, обережно опустіть її на середину відкритої поверхні гліцерину і, спостерігаючи за її рухом, виміряйте за допомогою секундоміра час проходження кульки між двома позначками. При відліках бажано, щоб око знаходилось на рівні відповідної позначки. Відстань між позначками вимірюється лінійкою. Усі результати вимірювань слід заносити до таблиці 5.2.
5. Визначте усталені швидкості падіння кожної кульки і за формулою (5.16) обчисліть коефіцієнти в'язкості гліцерину. Переконайтесь, що отримані значення η не

виявляють систематичної залежності від радіуса кульки. Побудуйте для цього графік $\eta(r)$.

- Визначте середнє значення коефіцієнта в'язкості гліцерину $\langle \eta \rangle$. Розглядаючи $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ як результати прямих вимірів, обчисліть вибірковий стандарт середнього $S_{\langle \eta \rangle}$, скориставшись таблицею 5.2.
- Виведіть формулу для розрахунку систематичної похибки η :

$$\left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2 = 4\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \frac{\sigma_\rho^2 + \sigma_{\rho_1}^2}{(\rho - \rho_1)^2} + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2. \quad (5.19)$$

Обчисліть похибку σ , скориставшись таблицею 5.3.

- Оцініть похибку $\langle \sigma \rangle$ у залежності від величин σ_η і $S_{\langle \eta \rangle}$. Занотуйте кінцевий результат, вказавши густину температуру гліцерину.
- Використовуючи таблицю 5.1 оцініть відсотковий вміст води у досліджуваному гліцерині.

Таблиця 5.2

n	d (мм)	t (с)	$v_{\text{уст}}$ (м/с)	η (Па·с)	$\eta_i - \langle \eta \rangle$ (Па·с)	$(\eta_i - \langle \eta \rangle)^2$ (Па·с) ²
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Параметри розрахунків:

Густина матеріалу кульок $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
 Густина гліцерину $\rho_1 =$
 Відстань між позначками $l =$
 Температура гліцерину $t =$

До таблиці 5.3 заносимо систематичні похибки параметрів, що входять у розрахункову формулу (5.19).

Таблиця 5.3

$\sigma_{\rho_1} =$	(кг/м ³)	$\sigma_r =$	(мм)
$\sigma_t =$	(с)	$\sigma_g =$	(м/с ²)
$\sigma_l =$	(м)	$\sigma_\rho =$	(кг/м ³)

Формули для результатів обчислень:

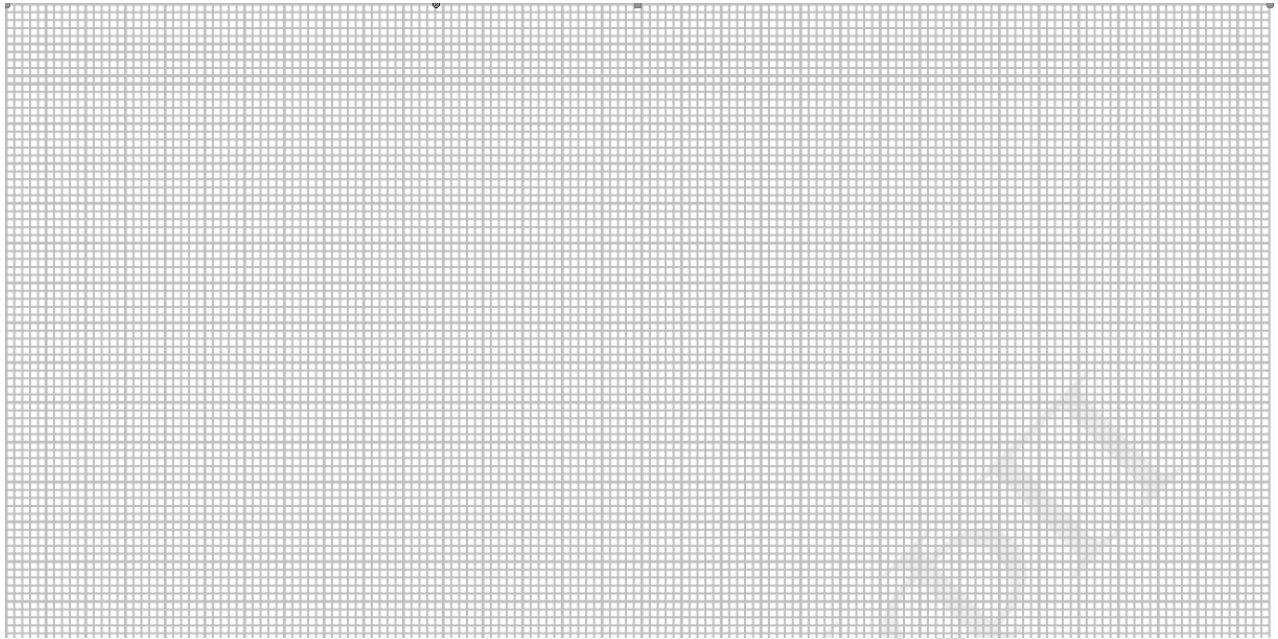
<p>1) $\sum_{i=1}^{20} \eta_i =$ (Па·с)</p>	<p>2) $\langle \eta \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{20} \eta_i}{n} =$ (Па·с)</p>
<p>3) $\sum_{i=1}^{20} (\eta_i - \langle \eta \rangle)^2 =$ (Па·с)²</p>	<p>4) $S_{\langle \eta \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \langle \eta \rangle)^2}{n(n-1)}} =$ (Па·с)</p>
<p>5) $\frac{\sigma_{\eta}}{\eta} \cdot 100\% =$</p>	<p>6) $\sigma_{\langle \eta \rangle} =$ (Па·с)</p>

Контрольні запитання

1. Яка фізична природа наявності в'язкості рідини? Як залежить в'язкість рідини від температури?
2. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя, коефіцієнт в'язкості.
3. Ламінарний і турбулентний рух. Число Рейнольдса.
4. Формула Стокса. Умова її застосування.
5. Поясніть як складено диференціальне рівняння (5.4) руху кульки у безмежній в'язкій рідині. Отримайте його розв'язок $v(t)$ і проведіть відповідний аналіз.
6. У чому полягає ідея вимірювання коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса?
7. Які кульки слід використовувати для вимірювань?
8. На якій відстані від відкритої поверхні гліцерину слід наносити верхню позначку?
9. Що є критерієм надійності даного експерименту?
10. Як обчислюються похибки у даній роботі?
11. Чому для проведення досліду рідина (гліцерин) повинна змочувати поверхню кульок?

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. "Техніка", К., 1999.
2. Бушок Г. В. Венгер. Курс фізики : у 3 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. посіб. – К: Вища школа, 2002 § 20 с. 56 – 57, §94 – 95 с. 273 – 276.
https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Byshok_2002_375.pdf
3. University Physics with Modern Physics" by Hugh D. Young and Roger A. Freedman. 12.6 VISCOSITY AND TURBULENCE. Pp. 382 – 384
<https://drive.google.com/file/d/12pun4ja9Eutp2M6yaz5QXwOBnjrvuGA9/view?usp=sharing>



Каф 3Ф Та МКТ