

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Фізико-математичний факультет

Лабораторна робота № 1-4

**ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ ЗА
ДОПОМОГОЮ ПЕРЕКИДНОГО МАЯТНИКА**

Виконана студ. групи _____

Київ-КПІ 2025

Лабораторна робота № 1-4

Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою перекидного маятника

Мета роботи: вивчення перекидного маятника, визначення прискорення сили тяжіння.

Обладнання: перекидний маятник, електронний секундомір, вимірвальна лінійка.

4.1. Теоретичні відомості

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке під дією сили тяжіння здатне коливатись навколо горизонтальної осі (рис.4.1). Точка O перетину вертикальної площини, що проходить через центр мас маятника C , з горизонтальною віссю називається точкою підвісу. Відхилення маятника від положення рівноваги характеризується кутом φ .

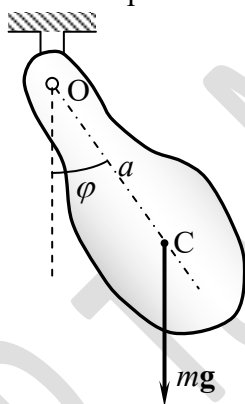


Рис. 4.1

Будемо вважати, що моменти сил тертя та опору незначні. В цьому випадку рух маятника визначається лише моментом сили тяжіння

$$M = -mga \sin \varphi,$$

де a – відстань OC від точки підвісу до центра мас.

Застосовуючи основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла (5.18), матимемо:

$$I\varphi'' = -mga \sin \varphi, \quad (4.1)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі O , $\varphi'' = d^2 \varphi / dt^2$ – кутове прискорення.

Для малих відхилень від положення рівноваги $\sin \varphi \approx \varphi$, тому рівняння (4.1) набуде вигляду:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (4.2)$$

де уведені позначення

$$\omega_0^2 = mga/I$$

Розв'язок цього рівняння добре відомий (див. п.20.3.1.6– це гармонічні коливання з частотою $\omega_0 = \sqrt{mga/I}$, при яких кут відхилення маятника від рівноважного положення

(тобто рівняння руху) визначається функцією

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.3)$$

де φ_0 – амплітуда коливань, α – початкова фаза.

Період коливань фізичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (4.4)$$

Якщо момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас C паралельно до осі качання, дорівнює I_0 , то згідно з теоремою Штейнера (5.20)

$$I = I_0 + ma^2. \quad (4.5)$$

Підставимо цей вираз у формулу (4.4):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga} + \frac{a}{g}}. \quad (4.6)$$

Останній вираз дозволяє з'ясувати поведінку функції $T(a)$ при дуже великих ($a \rightarrow \infty$) та малих ($a \rightarrow 0$) значеннях параметра “ a ”. Очевидно, що при $a \rightarrow \infty$ $T(a) \approx 2\pi \sqrt{a/g}$, тобто $T(a) \sim a^{1/2}$. Для дуже малих значень “ a ” $T(a) \sim a^{-1/2}$. У таких випадках кажуть, що при $a \rightarrow \infty$ період прямує до нескінченності як $a^{1/2}$, у той час як при $a \rightarrow 0$ період також прямує до нескінченності, але на цей раз, як $a^{-1/2}$.

Функція (4.6) неперервна на інтервалі $(0, \infty)$ і прямує до нескінченності на краях цього інтервалу. Відповідно, вона повинна досягати певного мінімального значення T_{\min} при $a \in (0, \infty)$. Окрім того, формула (4.6) описує залежність $T(a)$ як для “прямого”, так і для “оберненого” маятника. З огляду на ці міркування можна дуже просто побудувати графік функції $T(a)$, показаний на рис.4.2.

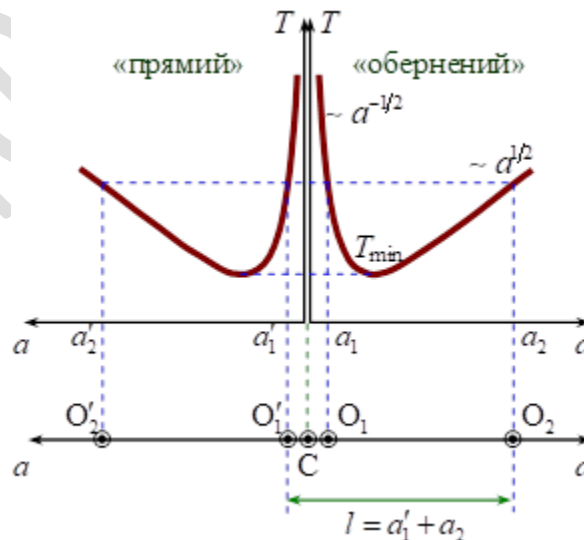


Рис. 4.2. Залежність періоду T коливань фізичного маятника від відстані « a » між точкою підвісу та центром мас

Формула (4.6) дає можливість експериментально визначити прискорення сили тяжіння. Дійсно, підвішуючи маятник на різних відстанях a_1 і a_2 від центра мас, можна виміряти відповідні періоди коливань T_1 і T_2 . Використовуючи співвідношення (4.6), отримаємо систему рівнянь:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \left[(I_0 + ma_1^2) / mga_1 \right],$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \left[(I_0 + ma_2^2) / mga_2 \right].$$

Якщо з рівнянь виключити I_0 , то отримаємо:

$$g = 4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2) / (a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2). \quad (4.7)$$

Осі T слід вважати співпадаючими: $a_1 = a'_1$; $a_2 = a'_2$. Одне й те ж саме значення періоду T (за умови $T > T_{\min}$) досягається під час підвішування маятника в точках O_1, O_2, O'_1, O'_2 .

Однак формулу (4.7) можна значно спростити. Припустимо, що нам вдалося знайти положення точок O_2 і O'_1 , розташованих по різні боки від центра мас (див. рис.4.2). У такому випадку $T_1 = T_2 = T$, і формула (4.7) набуває простішого вигляду:

$$g = 4\pi^2 l / T^2, \quad (4.8)$$

де $l = a'_1 + a_2$.

Усі величини, що входять до формули (4.8), можуть бути легко виміряні з великою точністю. Найбільшою складністю є визначення точок підвісу, в яких періоди “прямого” і “оберненого” маятників практично співпадають (звідси назва – перекидний).

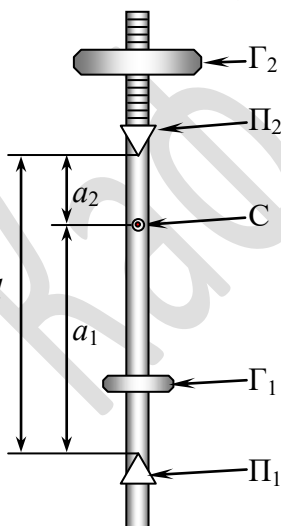


Рис. 4.3

Конструкція перекидного маятника

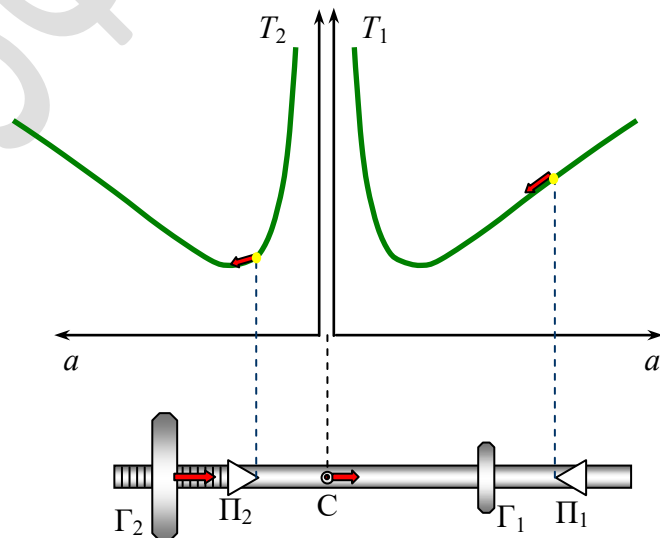


Рис. 4.4

Вплив переміщення різних елементів перекидного маятника на значення періодів T_1 і T_2 , положення центра мас C (тут Π_1, Π_2 – рухомі опорні призми, Γ_1, Γ_2 – рухомі тягарці,

Існує багато різноманітних конструкцій перекидного маятника, одна з яких зображена на рис.4.3. На сталевому стержні закріплено дві опорні призми (Π_1 і Π_2) і тягарці (Γ_1 і Γ_2), переміщуючи які, можна у досить широких межах змінювати період. Нанесені на поверхню стержня шкали визначають положення рухомих елементів конструкції. Їх вплив на періоди T_1 і T_2 ілюструє рис.4.4. Видно, що переміщення Π_2 більше впливає на період T_2 , ніж переміщення Π_1 на T_1 . При цьому положення центра мас майже не змінюється, оскільки призми досить легкі. Однак невеликий зсув тягарця Γ_2 у напрямку стрілки призводить до значного зміщення центра мас C . Це означає, що відстань a_2 збільшується, а a_1 на стільки ж зменшується. Обидва періоди зменшуються, однак T_2 значно швидше, завдяки чому їх можна вирівняти. При цьому різниця періодів T_1 та T_2 буде перебувати в межах випадкового розкиду результатів повторних вимірювань. Це дає змогу розглядати набір значень T_1 і T_2 як єдиний набір T та розрахувати відповідне середнє значення $\langle T \rangle$ і вибірковий стандарт середнього $S_{\langle T \rangle}$. Фактично ми розглядаємо $T_1 - T_2$ як випадкову похибку.

Розглянемо, як випадкова похибка вимірювання позначиться на похибці g . Для цього слід скористатися формулою (4.7) замість (4.8), яка не враховує відмінностей у періодах. Відповідний розрахунок приводить до такого результату:

$$S_{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_1} S_{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2} S_{\langle T \rangle}\right)^2} = \frac{8\pi^2 l \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2| \cdot T^3} S_{\langle T \rangle},$$

де $S_{\langle g \rangle}$ - вибірковий стандарт середнього значення g . Вираз для відносної похибки виглядає зовсім просто:

$$\frac{S_{\langle g \rangle}}{g} = \frac{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2|} \frac{S_{\langle T \rangle}}{T}. \quad (4.9)$$

Аналогічно розраховується систематична похибка:

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \frac{4(a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 - a_2)^2} \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2}, \quad (4.10)$$

де σ_l , σ_T , σ_π - систематичні похибки величин l , T , π . Ці вирази показують, що відносна похибка g необмежено зростає, якщо різниця $a_1 - a_2$ прямує до нуля, тобто якщо $T_1 \rightarrow T_{\min}$ (рис.4. 2). Тому планувати експеримент слід так, щоб a_1 і a_2 відрізнялись одне від одного досить вагомо. Неважко, однак, показати, що при значній відмінності a_1 і a_2 зростає затухання коливань, що призводить до пониження точності вимірювання періоду. Задовільні результати можна отримати, якщо вибрати

$$3 > a_1/a_2 > 1,5.$$

4.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з конструкцією перекидного маятника. Тягарець Γ_2 розмістіть якнайближче до призми Π_2 .

2. Приведіть маятник у коливальний рух на одній з опорних призм так, щоб амплітуда коливань не перевищувала 10° і виміряйте час 10-ти коливань t_1 . Повторіть це вимірювання ще два рази. Знайдіть середнє значення часу $\langle t_1 \rangle$. Результати вимірювань занесіть до табл. 1.
3. Переверніть маятник і виміряйте час 10-ти коливань t_2 на іншій опорній призмі тричі і по одержаним результатам визначте середнє значення $\langle t_2 \rangle$. Результати вимірювань занесіть до табл. 1.
4. Переміщуючи тягарець Γ_2 уздовж шкали, нанесеної на стержні, з кроком 1–2 поділки, проводьте вимірювання проміжків часу t_1 та t_2 описано в п.2, 3 і визначте середні значення $\langle t_1 \rangle$ та $\langle t_2 \rangle$ для різних положень тягарця Γ_2 .
5. На аркуші міліметрового паперу на одній діаграмі побудуйте графіки залежності середніх значень $\langle t_1 \rangle$ і $\langle t_2 \rangle$ від n , де n – поділка шкали. Точка перетину цих кривих визначить оптимальне положення тягарця Γ_2 , при якому значення періодів $T_1 = \langle t_1 \rangle / 10$ та $T_2 = \langle t_2 \rangle / 10$ будуть найбільш близькими. Точку перетину позначте n_0 .
6. Встановіть маятник на призму Π_2 , а тягарець Γ_2 закріпіть у положенні n_0 . Приведіть маятник у коливальний рух з відхиленням у межах кута 10° і виміряйте час t 50-ти коливань. Вимірювання проведіть тричі.
7. Підвісьте маятник на призму Π_1 , не змінюючи положення тягарця. Повторіть вимірювання часу 50-ти коливань (три серії вимірів) (див. п. 6). Дані пп. 4, 5 занесіть до табл.4.2.
8. Для кожної з шести серій вимірювань визначити значення періоду коливань T . Знайти середнє значення періоду $\langle T \rangle$.
9. Виміряти параметр l – відстань між призмами Π_1 і Π_2 .
10. За формулою (4.8) визначте прискорення вільного падіння $\langle g \rangle$, підставляючи замість T його середнє значення $\langle T \rangle$.
11. Використовуючи вирази (4.9) і (4.10), оцініть похибку визначення $\langle g \rangle$.

Параметри розрахунків:

$$l(\text{м}) = \dots\dots\dots; \quad \sigma_l(\text{м}) = \dots\dots\dots; \quad \sigma_T(\text{с}) = \dots\dots\dots; \quad \sigma_\pi = \dots\dots\dots$$

$$a_1 = \dots\dots\dots, \text{ м}; \quad a_2 = \dots\dots\dots, \text{ м}.$$

ПРИ ВИКОНАННІ ВІРТУАЛЬНОЇ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ ПАРАМЕТРИ a_1 та a_2 ВИЗНАЧАТИ НЕ ПОТРІБНО. ТАКОЖ НЕ ПОТРІБНО ОБЧИСЛЮВАТИ $S_{\langle g \rangle}$ та $\sigma_{\langle g \rangle}$.

Визначення похибок:

$$S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2}{6 \cdot 5}} = \dots\dots\dots;$$

Таблиця 4.2

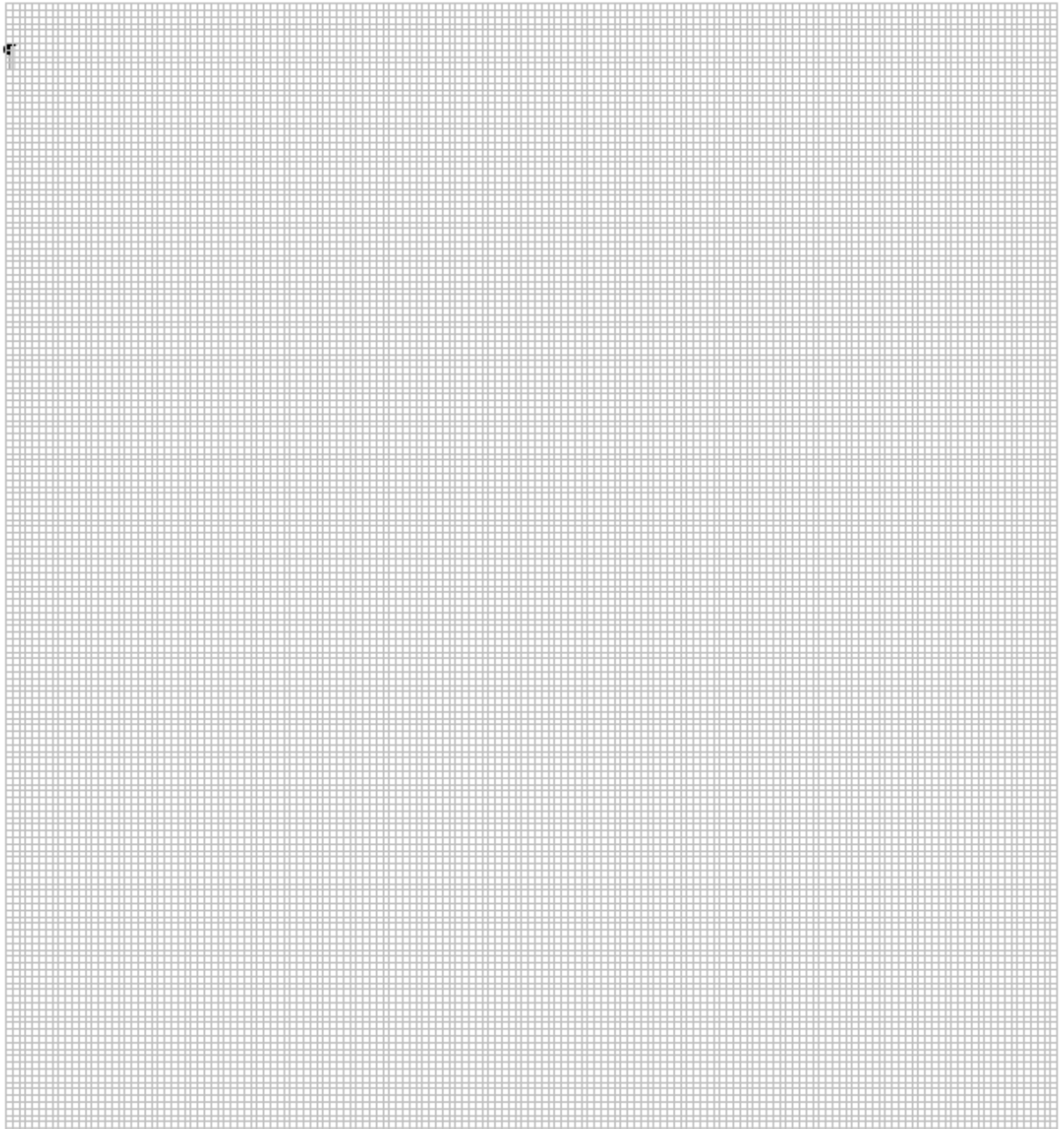
	Час 50-ти коливань, с	Період T , с	$T_i - \langle T \rangle$, с	$(T_i - \langle T \rangle)^2$, с ²
n	Призма Π_1			
1				
2				
3				
	Призма Π_2			
1				
2				
3				
	$\langle T \rangle = \frac{\sum_{i=1}^6 T_i}{6} =$			$\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2 =$

4.3. Контрольні запитання

- Момент сил і момент імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого початку (точки О). Зв'язок між ними – рівняння моментів для системи матеріальних точок.
- Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.
- Момент імпульсу і момент сил відносно деякої осі. Рівняння моментів відносно цієї осі.
- Момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
- Рівняння руху фізичного маятника. Його розв'язок для малих відхилень від положення рівноваги – гармонічні коливання.
- Залежність періоду коливань T фізичного маятника від відстані “а” між центром мас і точкою підвісу.
- Метод вимірювання прискорення сили тяжіння g за допомогою перекидного маятника.
- Як слід планувати експеримент, щоб забезпечити мінімальну похибку у вимірюванні g ?
- Дайте відповіді на запитання, які пропонуються в тексті.

Література

- Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. “Техніка”, К.,1999.
- Павловський М. А. Теоретична механіка. К.: «Техніка», 2002. С. 284 – 285.
- Дубовик В. М. Лекції з механіки : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с. ЛЕКЦІЯ 8, 9. С. 93-114. (НТБ НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»)



Ka