

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Лабораторна робота № 1-3

**ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО
РУХУ
ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА**

Виконана студ. групи _____

Київ-2025

Лабораторна робота 1-3

Вивчення законів динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека

Мета роботи: експериментальна перевірка основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла та визначення моменту інерції тіла.

Обладнання: 1) маятник Обербека; 2) набір тягарців; 3) електронний секундомір; 4) штангенциркуль; 5) масштабна лінійка.

3.1. Теоретичні відомості

Наслідком фундаментальних законів класичної механіки є основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомій осі:

$$I\beta = M_{\Sigma}, \quad (3.1)$$

де I – момент інерції тіла відносно осі обертання, β – кутове прискорення, M_{Σ} – сума проекція моментів зовнішніх сил на вісь обертання.

Експериментальна перевірка рівняння (3.1) є перевіркою основних положень класичної механіки.

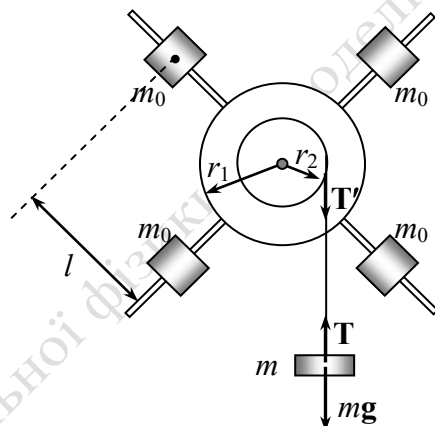


Рис. 3.1.

Принципова схема експериментальної установки

На рис.3.1. показано схему експериментальної установки (маятник Обербека). Вона складається з чотирьох стержнів, закріплених на втулці під прямим кутом один до одного. На ту ж втулку насаджено два шкиви різних радіусів r_1 і r_2 . Чотири тягарці однакової маси m_0 можна зміщувати уздовж стержнів і закріплювати на різних відстанях l від осі обертання, що дає змогу змінювати момент інерції системи. Уся ця конструкція може вільно обертатись навколо горизонтальної осі. На один із шківів намотується нитка із закріпленим на кінці тягарцем маси m , завдячуючи чому маятник починає обертатися.

На тягарець m діють сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу (пружності) нитки \vec{T} , як показано на рис.3.1. За другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \quad (3.2)$$

де \vec{a} – прискорення тягарця.

У проекціях на вісь ОУ, напрямлену вниз, отримаємо рівняння руху у скалярній формі:

$$ma = mg - T. \quad (3.3)$$

За III законом Ньютона, на шків діє протилежно напрямлена сила \vec{T}' , модуль якої дорівнює модулю сили $T' = T$. Сила T' створює момент сили, що діє на шків. Момент цієї сили відносно осі обертання шківів дорівнює

$$M = T \cdot r. \quad (3.4)$$

Рівняння руху маятника можна значно спростити, якщо попередньо збалансувати маятник, тобто, домогтися, щоб у вільному стані він знаходився у байдужій рівновазі (подумайте, як це практично здійснити та перевірити). При цьому центр мас системи співпаде з точкою О, що знаходиться на осі обертання, і момент сили тяжіння відносно цієї осі дорівнюватиме нулю. У такому випадку рух маятника визначається моментом сили натягу нитки M і моментом сил тертя M_T , що дозволяє записати основне рівняння обертального руху (3.1) у такому вигляді:

$$I\beta = M - M_T. \quad (3.5)$$

Розв'язавши сумісно рівняння (3.3), (3.4), (3.5) і використовуючи відомий зв'язок між кутовим та лінійним прискоренням

$$\beta = a/r, \quad (3.6)$$

отримаємо:

$$a = \frac{(mgr - M_T)r}{I + mr^2}. \quad (3.7)$$

Момент сил тертя при русі можна вважати сталим. У такому разі вираз (3.7) означає, що рух тягарця відбувається з постійним прискоренням ($a = \text{const}$).

Вимірявши час t , за який тягарець із стану спокою спуститься на відстань h , можна обчислити кутове прискорення маятника. Оскільки $h = at^2/2$, для β маємо:

$$\beta = \frac{2h}{rt^2}. \quad (3.8)$$

З рівнянь (3.3) та (3.4) одержимо момент сили натягу нитки відносно осі обертання:

$$M = m(g - a)r. \quad (3.9)$$

(Зауважимо, що β і M можна вирахувати, скориставшись рівняннями (3.8) і (3.9), які отримані незалежно від основного рівняння (3.5)).

Перепишемо рівняння (3.5) у зручному для перевірки вигляді:

$$M = M_T + I\beta. \quad (3.10)$$

Цей вираз означає, що залежністю $M(\beta)$ є пряма лінія, кутовий коефіцієнт k якої чисельно дорівнює моменту інерції системи:

$$I = k = \frac{\Delta M}{\Delta \beta}, \quad (3.11)$$

а точка перетину прямої з віссю M відповідає значенню моменту сил тертя M_T , що ілюструє рис.3.2.

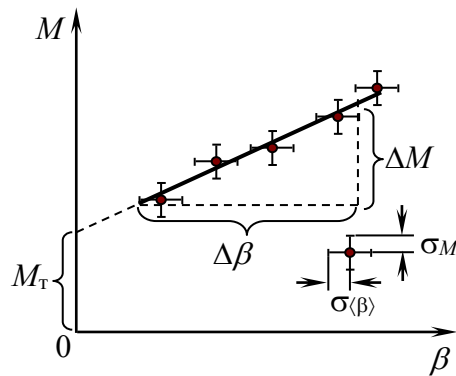


Рис. 3.2. Залежність моменту сили від кутового прискорення.

Відхилення експериментальних точок $M_i(\beta_i)$ від прямої $M(\beta) = M_T + I\beta$ знаходиться в межах похибок експерименту

Маючи у розпорядженні набір тягарців, можна в достатньо широких межах змінювати масу m , а, значить, і величини M і β , тобто дослідити експериментальну залежність $M(\beta)$. Якщо отримані точки (M_i, β_i) з урахуванням похибки експерименту вкладаються на пряму лінію, то це є свідченням справедливості співвідношення (3.10), отже, і основного рівняння динаміки обертального руху (3.1). У такому випадку через експериментальні точки можна провести пряму, найбільш близьку до усіх (M_i, β_i) і таку, що лежить в межах похибки експерименту. Це дасть змогу визначити момент сил тертя і розрахувати за формулою (3.11) момент інерції системи (див. рис.3.2).

3.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з конструкцією маятника Обербека. Перед початком експерименту перевірте, чи достатньо вільно маятник обертається на осі. Переконайтесь, що гвинт, який закріплює втулку, при обертанні маятника не затягується, інакше ви не отримаєте узгодження з теорією, бо на рух маятника впливатимуть додаткові сили та їх моменти, і рівняння руху ускладниться.

2. Установіть тягарці m_0 на деякій відстані l від осі обертання (бажано в першому експерименті цю відстань взяти максимальною $l = L_{\max}$)

Перевірте, чи є маятник збалансованим. Для цього повертайте його на кут $\approx 45^\circ$. У кожному новому положенні маятник повинен залишатися у спокої.

3. На шків більшого радіуса ($r = r_1$) намотайте нитку маятника, до кінця якої прикріпіть тягарець масою m_1 .

4. Відпустіть важок і зафіксуйте час, за який він пройде відстань $h = 1$ м. Дані про масу важка, радіус шківів та часу опускання запишіть в табл. 3.1. Виміри часу повторити тричі і визначте середнє значення $\langle t \rangle$.

5. Повторіть цей дослід для різних значень (5 - 6) маси m , додаючи щоразу ще один тягарець або комбінуючи важки. Усі результати вимірювань заносьте до табл. 3.1.

6. Завдання пунктів 4 – 6 виконайте для шківів меншого радіуса ($r = r_2$) при такому ж значенні $l = L_{\max}$. Дані занесіть до табл.3.1.

7. Змініть момент інерції I системи, встановивши тягарці m_0 на мінімальній відстані від осі обертання $l = L_{\min}$. Повторіть експерименти, описані у пп. 3 – 6. Дані занесіть до табл.3.2.

3.3. Обробка результатів вимірювань

1. Для кожного з дослідів за формулою (3.8) розрахувати кутове прискорення β , підставляючи в неї значення $\langle t \rangle$ замість t . Результати розрахунків занести в табл. 3.1.

2. Для кожного з дослідів з різними тягарцями розрахуйте момент сили натягу нитки. Оскільки $a \ll g$, то для розрахунку M замість формули (3.9) можна скористатися наближеною формулою:

$$M \approx mgr. \quad (3.12)$$

Результати розрахунків заносити в табл. 3.1 та табл. 3.2.

3. Для кожного із значень моменту інерції на аркуші міліметрового паперу побудуйте залежність $M(\beta)$. За цими графіками визначити моменти сил тертя M_T та моменти інерції I . Порівняйте отримані результати. Знайти середнє значення M_T та середні значення I_{\max} та I_{\min} .

4. Оцініть похибки визначення β та одного із значень моменту сили натягу нитки M . Для цього скористайтесь формулами, які дає «Теорія похибок і обробка результатів вимірювань у фізичній лабораторії»

$$\left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2; \quad (3.13)$$

$$\frac{S_{\langle\beta\rangle}}{\beta} = 2 \frac{S_{\langle t \rangle}}{t}; \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2, \quad (3.15)$$

де $S_{\langle\beta\rangle}$ і $S_{\langle t \rangle}$ – стандартні вибіркові відхилення відповідних середніх значень; $\sigma_\beta, \sigma_h, \dots, \sigma_t$ – систематичні похибки β, h, \dots, t .

5. На одному з експериментальних графіків відкладіть величини

$$\sigma_{\langle\beta\rangle} \text{ і } \sigma_{\langle M \rangle},$$

які характеризують похибки експерименту так, як показано на рис.3.2. Зробіть висновок відносно справедливості рівняння (3.10) у межах похибки експерименту. Дані для розрахунку похибок і результати розрахунків (див. «Теорією обробки результатів вимірювань...») записати в табл. 3.3.

6. З таблиці 3.1 за двома значеннями I_{\min} визначаємо середнє значення моменту інерції $\langle I_{\min} \rangle$ та так само середнє значення моменту сили тертя $\langle M_T \rangle$:

$$\langle I_{\min} \rangle = \quad \quad \quad \langle M_T \rangle =$$

7. Зробіть висновки стосовно практичного значення виконаного дослідження.

Табл. 3.1

$L = L_{\min}$										
i	$r = r_1 = \dots\dots\dots(\text{М})$					$r = r_2 = \dots\dots\dots(\text{М})$				
	$m(\text{кг})$ $\times 10^3$	$M_i,$ $\text{Н} \cdot \text{м}$	$t_{1,2,3}$	$\langle t \rangle, \text{с}$	$\beta_i,$ рад/с	$m(\text{кг})$ $\times 10^3$	$M_i,$ $\text{Н} \cdot \text{м}$	$t_{1,2,3}$	$\langle t \rangle, \text{с}$	$\beta_i,$ рад/с
1										
2										
3										
4										
5										
6										
$M_T = \dots\dots\dots(\text{Н} \cdot \text{м})$					$M_T = \dots\dots\dots(\text{Н} \cdot \text{м})$					
$I_{\min} = \dots\dots\dots(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$					$I_{\min} = \dots\dots\dots(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$					

Табл. 3.2

$L = L_{\max}$										
i	$r = r_1 = \dots\dots\dots(\text{М})$					$r = r_2 = \dots\dots\dots(\text{М})$				
	$m(\text{кг})$ $\times 10^3$	$M_i,$ $\text{Н} \cdot \text{м}$	$t_{1,2,3}$	$\langle t \rangle, \text{с}$	$\beta_i,$ рад/с	$m(\text{кг})$ $\times 10^3$	$M_i,$ $\text{Н} \cdot \text{м}$	$t_{1,2,3}$	$\langle t \rangle, \text{с}$	$\beta_i,$ рад/с
1										
2										
3										
4										

5									
6									
	$M_T = \dots\dots\dots(\text{Н} \cdot \text{м})$				$M_T = \dots\dots\dots(\text{Н} \cdot \text{м})$				
	$I_{\min} = \dots\dots\dots(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$				$I_{\min} = \dots\dots\dots(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$				

Табл. 3.3

$\sigma_t =$	$\sigma_m =$	$\sigma_g =$	$\sigma_\beta =$
$\sigma_h =$	$\sigma_r =$	$\sigma_M =$	$\sigma_{\langle\beta\rangle\Sigma} =$
$S_t =$	$S_{\langle\beta\rangle} =$	$\sigma_M/M =$	$\sigma_\beta/\beta =$

3.4. Контрольні запитання

1. Момент сил і момент імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого початку (точки O). Зв'язок між ними – рівняння моментів для системи матеріальних точок.
2. Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.
3. Момент імпульсу та момент сил відносно осі. Рівняння моментів відносно цієї осі.
4. Обчислення моменту інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання.
5. Теорема Штейнера.
6. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
5. Як у роботі визначається момент інерції маятника? Від чого він залежить?
6. Як за графічною залежністю $M(\beta)$ визначити момент сил тертя?
7. Як оцінити похибки експерименту?

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. “Техніка”, – К.,1999.
2. Дубовик В. М. Лекції з механіки : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с. ЛЕКЦІЯ 8, 9. С. 93-114. (НТБ НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»)

