

**Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра загальної фізики та моделювання фізичних процесів**

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1-17**

**ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ  
ТВЕРДИХ ТІЛ**

**Виконана студ. гр. \_\_\_\_\_**

\_\_\_\_\_

**НТУУ «КПІ»-2024**

# Лабораторна робота №1.17

## ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ

**Мета роботи:** експериментальна перевірка розрахунків моментів інерції твердих тіл різної геометричної форми.

**Обладнання:** крутильний маятник, тіла різної геометричної форми, терези.

### 1. СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 1.1. Момент інерції тіла відносно осі z

Мірою інертності тіла, що обертається навколо фіксованої осі, є момент інерції. Моментом інерції матеріальної точки називають добуток її маси  $m$  на квадрат відстані  $r$  до осі обертання:

$$I_z = mr^2. \quad (1)$$

Момент інерції є величиною адитивною, тобто момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції окремих частин цього тіла:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2. \quad (2)$$

Для твердого тіла момент інерції обчислюють, поділивши тіло на гранично малих об'ємах  $dV$ , маса кожного з яких  $dm = \rho dV$ , де  $\rho$  – густина речовини тіла, і замінивши додавання у формулі (2) на інтегруванням:

$$I_z = \int_V \rho(r) r^2 dV, \quad (3)$$

де густина речовини, в загальному випадку, може бути функцією відстані до осі обертання. Для тіл з високою симетрією і простою формою (куля, циліндр, стержень, площина) момент інерції легко обчислюється в аналітичній формі. Якщо ж тіло має складну форму, або складний розподіл густини відносно осі, то на основі формули (3) виконують чисельне інтегрування.

У даній роботі визначаються моменти інерції однорідних симетричних тіл – куба, прямокутного паралелепіпеда та еліпсоїда обертання відносно осей, що проходять через центр мас. Для таких тіл введемо прямокутну систему координат  $OXYZ$ , початок якої знаходиться в центрі мас, а осі співпадають з осями симетрії тіла. Для прямокутного

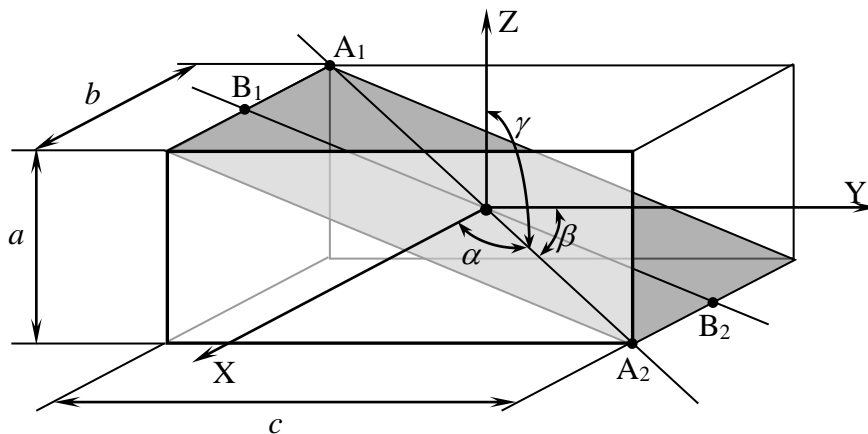


Рис. 1

паралелепіпеда осі показані на рис. 1.

Для осі обертання, що проходить через центр мас і **не співпадає** з осями OX, OY або OZ, момент інерції можна визначити за формулою

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \quad (4)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – напрямні косинуси осі обертання. Для осі обертання  $A_1A_2$  (див. рис. 1), яка проходить через протилежні вершини паралелепіпеда, або куба, напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Для осі  $B_1B_2$

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

## 2. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА УСТАНОВКА

Експериментальна установка для визначення моменту інерції являє собою крутильний маятник, показаний на рис. 2. Основним елементом маятника є рамка 1, яка підвішена на пружній нитці 2, натягнутій між двома кронштейнами 3 (нижній кронштейн на рис.2 не видний). Кронштейни закріплені на вертикальній штанзі 4, встановленій на горизонтальній підставці, на якій розміщений також лічильник часу і кількості коливань. Конструкція рамки така, що дає змогу закріплювати в ній різні тіла з метою визначення їх моментів інерції.

Після повороту рамки на певний кут вона здійснює коливання під дією моменту сили кручення нитки.

Період коливань маятника вимірюється з допомогою фотоелектричного датчика 6, закріпленого на середньому кронштейні штанги. До однієї із сторін рамки прикріплений прапорець 5, який у процесі коливань рамки перетинає світловий промінь фотодатчика, в результаті чого на електричний вхід секундоміра-лічильника часу і періоду коливань надходить відповідний електричний сигнал.

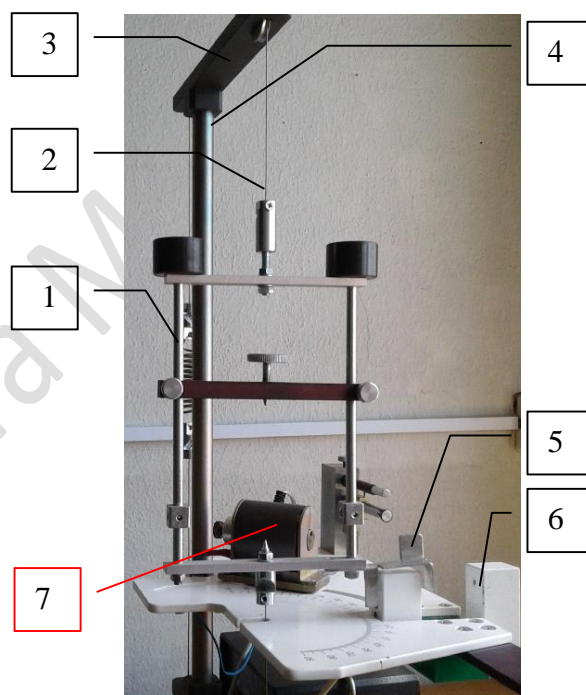


Рис. 2

## 3. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Період коливань крутильного маятника визначається як

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}, \quad (5)$$

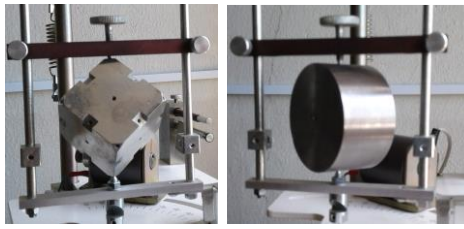


Рис. 3

де  $c$  – жорсткість нитки, момент інерції системи.

Оскільки момент інерції є величиною адитивною, то якщо в рамку вставити тіло (рис. 3), то результуючий момент інерції дорівнюватиме сумі моменту інерції рамки  $I_p$  та моменту інерції досліджуваного тіла  $I_T$ .  $I = I_p + I_T$ , отже формула (9)

матиме вигляд

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_T}{c}}. \quad (6)$$

У цьому виразі невідомі момент інерції тіла і рамки та жорсткість нитки. Для виключення невідомих скористаємось еталонним тілом для якого момент інерції  $I_e$  відомий. Якщо таке тіло вставити в рамку, то момент інерції системи становитиме  $I_p + I_e$  і період коливань дорівнюватиме

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_e}{c}} \quad (7)$$

Урахувавши, що період коливань рамки (без вставлених в неї тіл) дорівнює

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{c}}, \quad (8)$$

виключивши з рівнянь (6), (7), (8) невідомі  $I_p$  та  $c$ , після нескладних перетворень одержимо:

$$I_T = I_e \frac{T^2 - T_p^2}{T_e^2 - T_p^2}. \quad (9)$$

Таким чином, для визначення моменту інерції заданого тіла спочатку треба виміряти період коливань рамки без будь-якого тіла та період коливань рамки разом з еталонним тілом.

#### 4. ПРОВЕДЕННЯ ВИМІРЮВАНЬ

1. Приєднати секундомір-лічильник до мережі і на задній стінці увімкнути його живлення. Дати погрітися приладу і на передній панелі (див. рис. 4) натиснуту кнопку «Сброс».

2. Рамку повернути так, щоб прапорець торкнувся магніта (на рис. 1 позначений 7) і натиснути кнопку «ЗМ» на передній панелі лічильника.

3. Натиснути кнопку «Пуск» і слідкувати за показами лічильника кількості коливань на передній панелі. В момент, коли на панелі з'явиться цифра 9 натиснути кнопку «Стоп». Записати в таблицю 1 кількість коливань і покази секундоміра.

4. Пункти 2 і 3 повторити 5 разів.

5. Вставити в рамку еталонне тіло. Слідкуйте, щоб фіксуючі гвинти попали в спеціальні отвори і тіло рухалося разом з рамкою, не ковзаючи. Виконайте вимірювання, описані в п. 2 – 4.

6. Виміряти розміри досліджуваного тіла. **Тіло задає викладач.** Маса тіл наведені в Додатку

7. Вставити в рамку досліджуване тіло так, щоб вісь обертання співпадала з однією з головних осей інерції OX, OY, OZ, і виконати вимірювання, описані в п. 2 – 4.



Рис. 4

8. Повторити вимірювання для двох інших головних осей інерції.

9. Вставити досліджуване тіло в рамку так, щоб вісь обертання **не** співпадала з головною вісю інерції (**вісь обертання задає викладач**) і повторити вимірювання, описані в п.2 – 4. Дані записати в таблицю 3.

Таблиця 1. Результати вимірювання

Рамка				Еталонне тіл			
№	Кількість коливань	Час	Період	№	Кількість коливань	Час	Період
1				1			
2				2			
3				3			
4				4			
5				5			
		Середнє значення періоду				Середнє значення періоду	
		Похибка періоду				Похибка періоду	

Таблиця 2. Параметри еталонного тіла - циліндра

Маса (кг)	$928,2 \pm 0,01$ г
Діаметр (м)	$65,4 \pm 0,1$ мм
Висота (м)	$36 \pm 0,1$ мм

Таблиця 3. Результати вимірювань досліджуваного тіла

Досліджуване тіло. Вісь 1				Досліджуване тіло. Вісь 2			
№	Кількість коливань	Час	Період	№	Кількість коливань	Час	Період
1				1			
2				2			
3				3			
4				4			
5				5			
		Середнє значення періоду				Середнє значення періоду	
		Похибка періоду				Похибка періоду	

Досліджуване тіло. Вісь 3				Досліджуване тіло. Задана вісь			
№	Кількість коливань	Час	Період	№	Кількість коливань	Час	Період
1				1			
2				2			
3				3			
4				4			
5				5			
		Середнє значення періоду				Середнє значення періоду	
		Похибка періоду				Похибка періоду	

## 5. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

1. Обчислити середні значення періодів коливань рамки та еталонного тіла, а також випадкову похибку і записати результати в таблиці 1 і 3.
2. Обчислити моменти інерції досліджуваного тіла відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Результати записати в табл.4.
3. Для куба та паралелепіпеда виміряти розміри  $a$ ,  $b$ ,  $c$  й обчислити напрямні косинуси для заданої осі обертання. Результати занести в табл. 5.
4. Розрахувати момент інерції тіла відносно заданої осі за формулою (6) та формулою (4), порівняти результати розрахунків і зробити висновки. Якщо задана вісь обертання тіла не співпадає з осями  $A_1A_2$ , або  $B_1B_2$ , напрямні косинуси необхідно визначити самостійно.

Таблиця 4. Моменти інерції тіл

Момент інерції	Значення моменту інерції кг·м <sup>2</sup>
Еталонне тіло	
$I_x = I_y$	
$I_z$	

Таблиця 5. Розміри тіла. Напрямні косинуси.

Розміри, мм	Напрямні косинуси
$a =$	$\cos \alpha =$
$b =$	$\cos \beta =$
$c =$	$\cos \gamma =$

Момент інерції тіла за результатами експерименту (за формулою (9))

$$I = \dots\dots\dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

Момент інерції тіла відносно заданої викладачем осі, розрахований за формулою (4):

$$I = \dots\dots\dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

## 6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Вектор моменту імпульсу. Рівняння моментів.
2. Момент імпульсу точки і твердого тіла відносно осі обертання. Основне рівняння динаміки обертального руху.
2. Момент інерції відносно осі: матеріальної точки, сукупності матеріальних точок та твердого тіла.
3. Дії, необхідні для виведення формули моменту інерції.
4. Виведення формул моментів інерції: тонкого кільця, диска, тонкого стержня, куба, кулі.
5. Сформулюйте і доведіть теорему Штейнера.
6. Виведення формули періоду крутильних коливань.
7. Пояснення методики визначення моменту інерції тіл методом крутильних коливань

## 7. ЛІТЕРАТУРА

1. Барьяхтар В.Г., Барьяхтар И.В., Гермаш Л.П., Довгий С.А. Механіка. К.: Інститут магнетизма НАН України і МОН України, 2004. С. 198 – 211.
2. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. Т.1 Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. К.: «Техніка», 1999. § 4.2

Укладач С.О. Подласов

### Додаток



$m = 793,7 \text{ г}$



$m = 850,5 \text{ г}$



$m = 844,9 \text{ г}$

Укладач С.О. Подласов

Каф 34