

Національний технічний університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
Фізико-математичний факультет
Кафедра загальної фізики та моделювання фізичних процесів

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1-4

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕКИДНОГО МАЯТНИКА

Виконана студ.
групи _____

Київ-2022

Лабораторна робота № 1-4

Визначення прискорення вільного падіння за допомогою перекидного маятника

Мета роботи: вивчення законів динаміки твердого тіла на прикладі перекидного маятника; визначення прискорення сили тяжіння.

Обладнання: перекидний маятник, електронний секундомір, вимірвальна лінійка.

4.1. Теоретичні відомості

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке під дією сили тяжіння здатне коливатись навколо горизонтальної осі (рис.4.1), яка проходить через довільну точку O , розташовану вище центра мас (точка C). Відхилення маятника від положення рівноваги характеризується кутом φ між вертикаллю та лінією, що з'єднує точки O та C .

Будемо вважати, що моменти сил тертя та опору незначні. В цьому випадку рух маятника визначається лише моментом сили тяжіння. Якщо маятник віддаляється від положення рівноваги (у дану мить рухається проти годинникової стрілки), то вектор його кутової швидкості напрямлений «на нас» перпендикулярно до площини рис. 4.1. Цей напрям задає додатній напрям осі OZ . Вектор моменту сили тяжіння напрямлений «від нас» і його проекція на вісь OZ від'ємна:

$$M = -mga \sin \varphi,$$

де a – відстань OC від осі обертання до центра мас.

Застосовуючи основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла, матимемо:

$$I\varphi'' = -mga \sin \varphi, \quad (4.1)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі O , $\varphi'' = d^2\varphi/dt^2$ – кутове прискорення.

Для малих відхилень від положення рівноваги $\sin \varphi \approx \varphi$ ($\varphi \leq 0,1$ рад), і рівняння (4.1) може бути записано у вигляді:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (4.2)$$

де введено позначення

$$\omega_0^2 = mga/I.$$

Розв'язок цього рівняння добре відомий – це гармонічні коливання з частотою $\omega_0 = \sqrt{mga/I}$, при яких кут відхилення маятника від рівноважного положення (тобто рівняння руху) визначається функцією

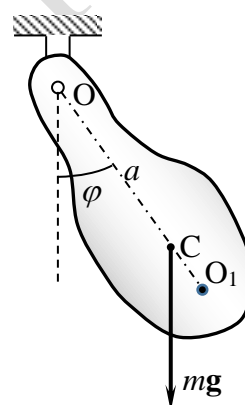


Рис. 4.1

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.3)$$

де φ_0 – амплітуда коливань, α – початкова фаза.

Період коливань фізичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (4.4)$$

Величину $l_{зв} = I/ma$, називають зведеною довжиною фізичного маятника. В такому разі формулу (4.4) можна записати у вигляді $T = 2\pi \sqrt{l_{зв}/g}$, який подібний до формули періоду для математичного маятника. Христіан Гюйгенс довів, що коли вздовж лінії, яка проходить через вісь обертання та центр мас, відкласти відстань, рівну зведеній довжині, то точка O_1 (див. рис. 14.1) матиме властивість взаємності з точкою O . Ця властивість полягає в тому, що якщо вісь перенести в точку O_1 , то період коливань такого «перевернутого» маятника буде таким самим як і період коливань «прямого» маятника, вісь якого проходить через точку O . Якщо момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас C паралельно до осі качання, дорівнює I_0 , то згідно з теоремою Штейнера (5.20)

$$I = I_0 + ma^2. \quad (4.5)$$

Підставимо цей вираз у формулу (4.4):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga} + \frac{a}{g}}. \quad (4.6)$$

Останній вираз дозволяє з'ясувати поведінку функції $T(a)$ при дуже великих ($a \rightarrow \infty$) та малих ($a \rightarrow 0$) значеннях параметра « a ». Очевидно, що при $a \rightarrow \infty$

$T(a) \approx 2\pi \sqrt{a/g}$, тобто $T(a) \sim a^{1/2}$. Для дуже малих значень « a » $T(a) \sim a^{-1/2}$. У таких випадках кажуть, що при $a \rightarrow \infty$ період прямує до нескінченності як $a^{1/2}$, у той час як при $a \rightarrow 0$ період також прямує до нескінченності, але на цей раз, як $a^{-1/2}$.

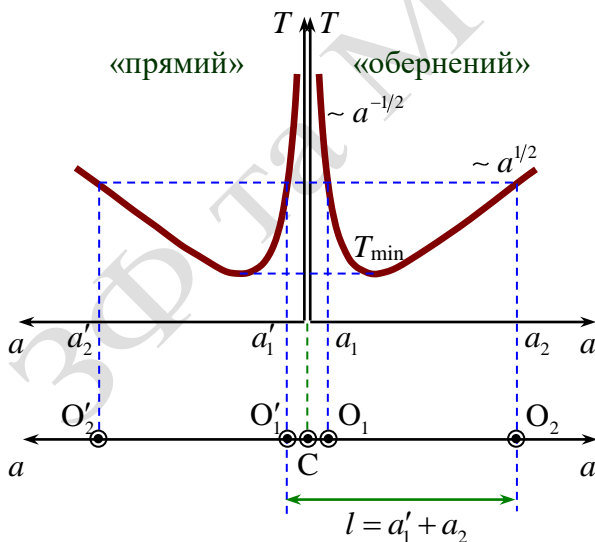


Рис.4.2.

Залежність періоду коливань T фізичного маятника від відстані « a » між точкою підвісу й центром мас.

Функція (4.6) неперервна на інтервалі $(0, \infty)$ і прямує до нескінченності на краях цього інтервалу. Відповідно, вона повинна досягати певного мінімального значення T_{\min} при $a \in (0, \infty)$. Окрім того, формула (4.6) описує залежність $T(a)$ як для «прямого», так і для «оберненого» маятника. З огляду на ці міркування можна дуже просто побудувати графік функції $T(a)$, показаний на рис.4.2. Осі « T » для прямого та оберненого маятників співпадають.

З рисунка 4.2 очевидно, що одне й те ж саме значення періоду T (за умови $T > T_{\min}$) досягається під час підвішування маятника в точках O_1, O_2, O'_1, O'_2 .

Формула (4.6) дає можливість експериментально визначити прискорення сили тяжіння. Дійсно, підвішуючи маятник на різних відстанях a_1 і a_2 від центра мас, можна виміряти відповідні періоди коливань T_1 і T_2 . Використовуючи співвідношення (4.6), отримаємо систему рівнянь:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \left[(I_0 + ma_1^2) / mga_1 \right],$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \left[(I_0 + ma_2^2) / mga_2 \right].$$

Якщо з рівнянь виключити I_0 , то отримаємо:

$$g = 4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2) / (a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2). \quad (4.7)$$

Формулу (4.7) можна значно спростити. Припустимо, що нам вдалося знайти положення точок O_2 і O'_1 (див. рис. 4.2), розташованих по різні боки від центра мас. У такому випадку $T_1 = T_2 = T$, і формула (4.7) набуває простішого вигляду:

$$g = 4\pi^2 l / T^2, \quad (4.8)$$

де $l = a'_1 + a_2$ називається зведеною довжиною маятника – це довжина підвісу такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань фізичного маятника.

Усі величини, що входять до формули (4.8), можуть бути легко виміряні з великою точністю. Найбільшою складністю є визначення точок підвісу, в яких періоди “прямого” і “оберненого” маятників практично співпадають (звідси назва – перекидний).

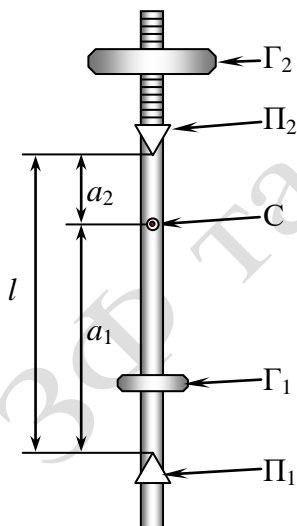


Рис. 4.3

Конструкція перекидного маятника

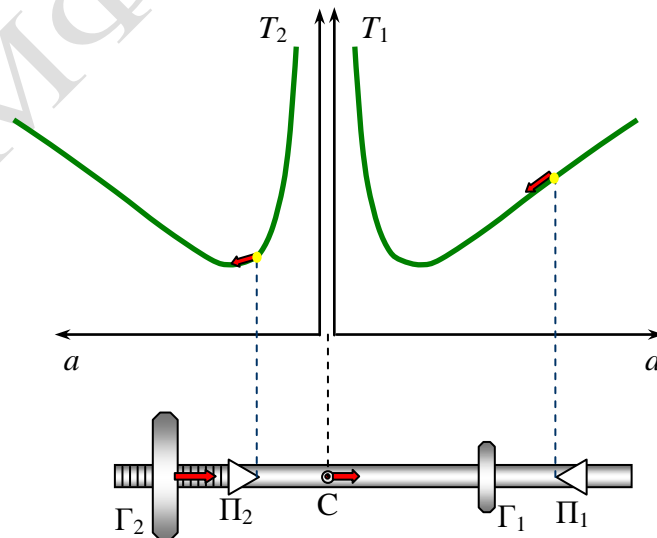


Рис. 4.4

Вплив переміщення різних елементів перекидного маятника на значення періодів T_1 і T_2 , положення центра мас C (тут Π_1, Π_2 – рухомі опорні призми, Γ_1, Γ_2 – рухомі тягарці,

Існує багато різноманітних конструкцій перекидного маятника, одна з яких зображена на рис.4.3. На сталевому стержні закріплено дві опорні призми (Π_1 і Π_2) і

тягарці (Γ_1 і Γ_2), переміщуючи які, можна у досить широких межах змінювати період. Нанесені на поверхню стержня шкали визначають положення рухомих елементів конструкції. Їх вплив на періоди T_1 і T_2 ілюструє рис.4.4. Видно, що переміщення Π_2 більше впливає на період T_2 , ніж переміщення Π_1 на T_1 . При цьому положення центра мас майже не змінюється, оскільки призми досить легкі. Однак невеликий зсув тягарця Γ_2 у напрямку стрілки призводить до значного зміщення центра мас C . Це означає, що відстань a_2 збільшується, а a_1 на стільки ж зменшується. Обидва періоди зменшуються, однак T_2 значно швидше, завдяки чому їх можна вирівняти. При цьому різниця періодів T_1 та T_2 буде перебувати в межах випадкового розкиду результатів повторних вимірювань. Це дає змогу розглядати набір значень T_1 і T_2 як єдиний набір T та розрахувати відповідне середнє значення $\langle T \rangle$ і вибірковий стандарт середнього $S_{\langle T \rangle}$.

Фактично ми розглядаємо $T_1 - T_2$ як випадкову похибку.

Розглянемо, як випадкова похибка вимірювання позначиться на похибці g . Для цього слід скористатися формулою (4.7) замість (4.8), яка не враховує відмінностей у періодах. Відповідний розрахунок приводить до такого результату:

$$S_{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_1} S_{\langle T \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2} S_{\langle T \rangle} \right)^2} = \frac{8\pi^2 l \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2| \cdot T^3} S_{\langle T \rangle},$$

де $S_{\langle g \rangle}$ - вибірковий стандарт середнього значення g . Вираз для відносної похибки виглядає зовсім просто:

$$\frac{S_{\langle g \rangle}}{g} = \frac{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2|} \frac{S_{\langle T \rangle}}{T}. \quad (4.9)$$

Аналогічно розраховується систематична похибка:

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l} \right)^2 + \frac{4(a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 - a_2)^2} \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi} \right)^2}, \quad (4.10)$$

де σ_l , σ_T , σ_π - систематичні похибки величин l , T , π . Ці вирази показують, що відносна похибка g необмежено зростає, якщо різниця $a_1 - a_2$ прямує до нуля, тобто якщо $T_1 \rightarrow T_{\min}$ (рис.4. 2). Тому планувати експеримент слід так, щоб a_1 і a_2 відрізнялись одне від одного досить вагомо. Неважко, однак, показати, що при значній відмінності a_1 і a_2 зростає затухання коливань, що призводить до пониження точності вимірювання періоду. Задовільні результати можна отримати, якщо вибрати

$$3 > a_1/a_2 > 1,5.$$

4.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з конструкцією перекидного маятника. Тягарець Γ_2 розмістіть якнайближче до призми Π_2 ..
2. Приведіть маятник у коливальний рух на одній з опорних призм так, щоб амплітуда коливань не перевищувала 10° і виміряйте час 10-ти коливань t_1 . Повторіть це вимірювання ще два рази. Обчисліть середнє значення часу $\langle t_1 \rangle$. Результати занесіть до табл. 1.

3. Переверніть маятник і виміряйте час 10-ти коливань t_2 на іншій опорній призмі тричі і по одержаним результатам обчисліть середнє значення $\langle t_2 \rangle$. Результати занесіть у табл. 1.
4. Переміщуючи тягарець Γ_1 уздовж шкали, нанесеної на стержні, з кроком в 1 поділку, проводьте вимірювання проміжків часу t_1 та t_2 описано в п.2, 3 і визначте середні значення $\langle t_1 \rangle$ та $\langle t_2 \rangle$ для різних положень тягарця Γ_1 .
5. На аркуші міліметрового паперу на одній діаграмі побудуйте графіки залежності середніх значень $\langle t_1 \rangle$ і $\langle t_2 \rangle$ від n , де n – поділка шкали. Точка перетину цих кривих визначить оптимальне положення тягарця Γ_1 , при якому значення періодів $T_1 = \langle t_1 \rangle / 10$ та $T_2 = \langle t_2 \rangle / 10$ будуть найбільш близькими. Точку перетину позначте n_0 .
6. Встановіть маятник на призму Π_1 , а тягарець Γ_1 закріпіть у положенні n_0 . Приведіть маятник у коливальний рух з відхиленням у межах кута 10° і виміряйте час t 50-ти коливань. Вимірювання проведіть тричі.
7. Підвісьте маятник на призму Π_2 , не змінюючи положення тягарця. Повторіть вимірювання часу 50-ти коливань (три серії вимірів) (див. п. 6). Дані пп. 4, 5 занесіть до табл.4.2.
8. Для кожної з шести серій вимірювань визначити значення періоду коливань T . Знайти середнє значення періоду $\langle T \rangle$.
9. Виміряти параметр l – відстань між призмами Π_1 і Π_2 .
10. За формулою (4.8) обчисліть прискорення вільного падіння $\langle g \rangle$, підставляючи замість T його середнє значення $\langle T \rangle$.
11. Використовуючи вирази (4.9) і (4.10), оцініть похибку визначення $\langle g \rangle$.

Параметри розрахунків:

$$l(\text{м}) = \dots\dots\dots; \quad a_1(\text{м}) = \dots\dots\dots; \quad a_2(\text{м}) = \dots\dots\dots;$$

$$\sigma_l(\text{м}) = \dots\dots\dots; \quad \sigma_T(\text{с}) = \dots\dots\dots; \quad \sigma_\pi = \dots\dots\dots$$

Визначення похибок:

$$S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2}{6 \cdot 5}} = \dots\dots\dots;$$

$$\left(S_{\langle g \rangle} / g \right) \cdot 100\% = \dots\dots\dots; \quad \left(\sigma_{\langle g \rangle} / g \right) \cdot 100\% = \dots\dots\dots$$

Остаточний результат:

$$\langle g \rangle = \dots\dots\dots; \quad S_{\langle g \rangle} = \dots\dots\dots; \quad \sigma_{\langle g \rangle} = \dots\dots\dots$$

Табл. 4.1

n	На Π_1		На Π_2	
	t_1, c	$\langle t_1 \rangle, c$	t_2, c	$\langle t_2 \rangle, c$

Табл. 4.2

	Час 50-ти коливань, с	Період T , с	$T_i - \langle T \rangle$, с	$(T_i - \langle T \rangle)^2$, с ²
n	Призма Π_1			
1				
2				
3				
	Призма Π_2			
1				
2				
3				
	$\langle T \rangle = \frac{\sum_{i=1}^6 T_i}{6} =$			$\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2 =$

4.3. Контрольні запитання

1. Момент сил і момент імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого початку (точки O). Зв'язок між ними – рівняння моментів для системи матеріальних точок.
2. Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.
3. Момент імпульсу і момент сил відносно деякої осі. Рівняння моментів відносно цієї осі.
4. Момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
5. Рівняння руху фізичного маятника. Його розв'язок для малих відхилень від положення рівноваги – гармонічні коливання.
6. Залежність періоду коливань T фізичного маятника від відстані “ a ” між центром мас і точкою підвісу. Зведена довжина фізичного маятника
7. Доведіть, що періоди коливань «прямого» та «перевернутого» маятників однакові.
8. Метод визначення прискорення сили тяжіння g за допомогою перекидного маятника.
9. Як слід планувати експеримент, щоб забезпечити мінімальну похибку у вимірюванні g ?
10. Дайте відповіді на запитання, які пропонуються в тексті.

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. “Техніка”, К.,1999.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка. К.: «Техніка», 2002. С. 284 – 285.

