Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Фізико-математичний факультет

Лабораторна робота № ФПЕ-11

Вивчення вимушених коливань у коливальному контурі

Виконана студентом групи_____________

____

Київ-2016

Лабораторна робота № ФПЕ-11

Вивчення вимушених коливань у коливальному контурі

Мета роботи: вивчення резонансу послідовному колі RLC.

Прилади та обладнання – звуковий генератор ГЗ-111 (PQ); електронний осцилограф С1-76 (РО); касета ФПЕ-11; магазин опорів (MR); магазин ємностей (МС).

Блок-схема лабораторної роботи наведено на рис. 11.1.

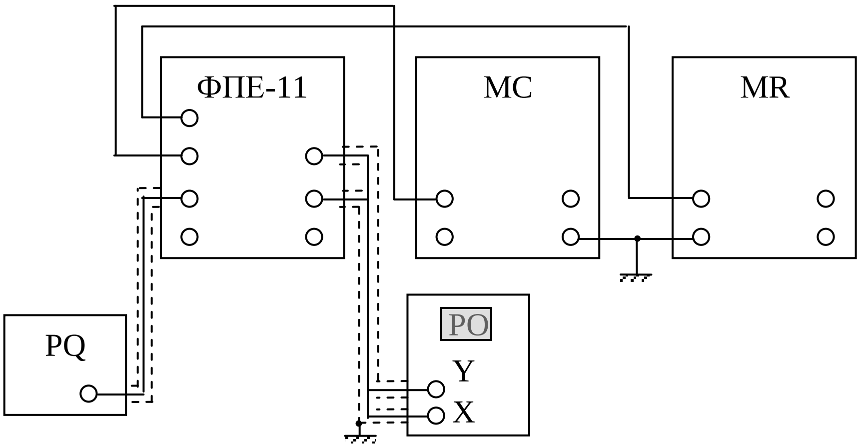

Рис. 11.1

Теоретичні відомості

Розглянемо процеси, які проходять у послідовному коливному контурі, приєднаному до джерела, електрорушійна сила якого змінюється з часом за гармонічним законом

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}\cos\Omega t. \qquad (11.1)$$

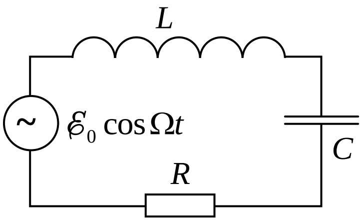

Рис. 11.2

Позначимо U – напругу на конденсаторі ємністю C, U_L – напруга на котушці індуктивності, I – струм у контурі. Якщо струм вважати стаціонарним, то струм і напруга в провіднику підпорядкована таким самим законам, що і постійний струм. За другим правилом Кірхгофа сума напруг на елементах контуру дорівнює ЕРС, що діє в цьому ж контурі (рис. 11.2). Таким чином, можемо записати:

$$U_L + IR + U = \mathcal{E}_0 \cos\Omega t. \qquad (11.2)$$

Напруга на котушці чисельно дорівнює ЕРС самоіндукції

$$U_L = -\mathcal{E}_S = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.3)$$

Струм у колі визначає зміну заряду конденсатора, тому

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(CU)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}. \tag{11.4}$$

Підставивши (11.3) в (11.4) і одержані вирази в (11.2), отримаємо

$$LC\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + U = \mathcal{E}_0\cos\Omega t. \tag{11.5}$$

Представимо останнє рівняння у канонічній формі, поділивши всі його частини на LC:

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}U = \frac{\mathcal{E}_0}{LC}\cos\Omega t.$$

Уведемо позначення $R/2L = \beta$, $\omega_0^2 = 1/LC$ й одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2U = \omega_0^2\mathcal{E}_0\cos\Omega t. \tag{11.6}$$

Розв’язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (11.6) дорівнює сумі повних розв’язків відповідного однорідного рівняння та частинного розв’язку неоднорідного рівняння. За умови, що $\omega_0^2 > \beta^2$ розв’язком рівняння

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2U = 0 \tag{11.7}$$

є функція

$$U_1 = U_{01}e^{-\beta t}\cos(\omega t). \tag{11.8}$$

Це рівняння є рівнянням загасаючих коливань. Загасання визначається множником $\mathrm{e}^{-\beta t}$. За час $\tau = 1/\beta$, який називають часом релаксації, амплітуда коливань зменшується в е разів. (Загасання коливань у контурі зумовлено нагріванням провідників, тобто перетворенням енергії електричного та магнітного полів на теплову (внутрішню) енергію). Складова U_1 є суттєвою при $t \le \tau$, тобто вона визначає перехідний процес при встановленні коливань. Якщо ж $t >> \tau$, то цією складовою в загальному розв’язку можна знехтувати.
Під дією джерела змінної ЕРС колі встановлюються коливання з частотою цього джерела, але із зсувом фаз φ:

$$U = U_0\cos(\Omega t - \varphi) \tag{11.9}$$

при цьому

$$U_0 = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2\Omega^2}}. \tag{11.10}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{11.11}$$

Струм у контурі

$$I = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\Omega CU_0\sin(\Omega t - \varphi) = I_0\cos(\Omega t - \psi), \tag{11.12}$$

де $\psi = \varphi + \pi/2$. Амплітуда струму у контурі так як і напруга на конденсаторі залежить від співвідношення частот Ω та ω_0:

$$I_0=\frac{\mathcal{E}_0 C\omega_0^2\Omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (11.12)$$

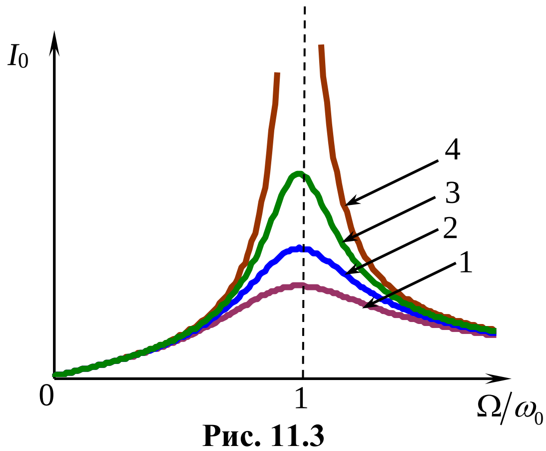

Рис. 11.3

Графік залежності I_0 від Ω/ω_0 зображено на рис. 11.3. З графіка видно, що амплітуда струму різко зростає, якщо циклічна частота Ω джерела ЕРС наближається до власної частоти ω_0. Це явище називається резонансом в електричному колі, а криві – резонансними кривими. Значення максимуму струму залежить від β, а при $\beta=0$ $I_0\to\infty$ (крива 4); при збільшенні β максимальне значення I_0 зменшується (криві 3, 2 та 1).

Зсув фаз ψ коливань струму у контурі та зовнішньої ЕРС:

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\omega_0^2-\Omega}{2\beta\Omega}. \qquad (11.13)$$

Графік залежності ψ від частоти Ω зображено на рис. 11.4. Криві 1 та 2 відповідають різним значенням β. При $\Omega=\omega_0$ $\operatorname{tg}\psi=0$ і $\psi=0$.

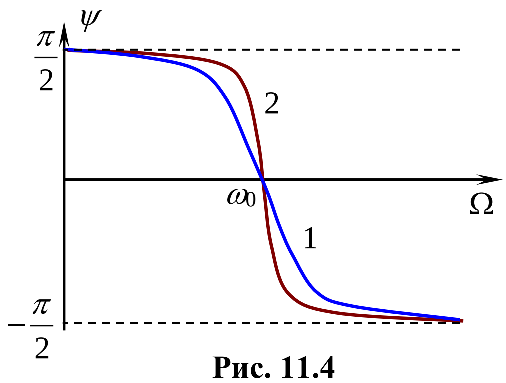

Рис. 11.4

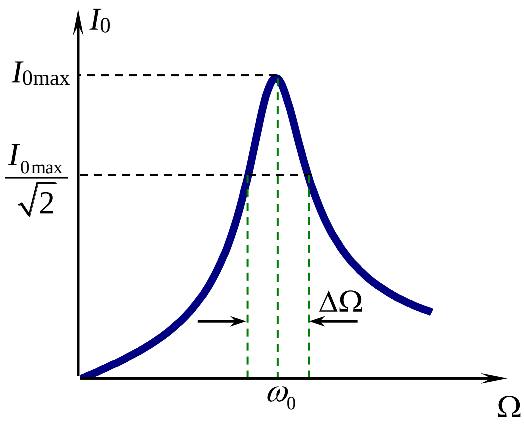

Рис. 11.5

Величина $Q=\pi/\beta T=\omega/2\beta$ (тут T – період загасаючих коливань, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ - їхня циклічна частота) називається добротністю коливного контуру. Добротність контуру визначає гостроту резонансних кривих. Знайдемо ширину резонансної кривої $\Delta\Omega$ на рівні $I_0=I_{0\max}/\sqrt{2}=0{,}707I_{0\max}$ (рис. 11.5). З формули (11.12) випливає, що максимальне значення сили струму $I_{0\max}=\left(\mathcal{E}_0 C\omega_0^2\right)/2\beta$, а

$$I_0=\frac{2\beta\Omega I_{0\max}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (11.14)$$

При $I_0=I_{0\max}/\sqrt{2}$ формула (11.14) запишеться так:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\beta\Omega I_{0\max}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (11.15)$$

Вираз (11.15) можна привести до виду

$$2\beta\Omega=\omega_0^2-\Omega^2,$$

або $2\beta\Omega=\left(\omega_0-\Omega\right)\left(\omega_0+\Omega\right)$. Величина $\omega_0-\Omega=\Delta\Omega/2$, а поблизу резонансу $\omega_0\approx\Omega$. Після підстановки отримаємо, що $\Delta\Omega=2\beta$ і

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0}=\frac{2\beta}{\omega_0}\approx\frac{1}{Q}. \qquad (11.16)$$

При малому загасанні $\left(\beta<<\omega_0\right)$ маємо $\omega\approx\omega_0$ і відносна ширина резонансної кривої чисельно дорівнює величині, яка обернена добротності контуру. Якщо відомі параметри коливного контуру, то добротність може бути розрахована за співвідношенням

$$Q=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (11.16а)$$

Принципова електрична схема експериментальної установки показана на рис. 11.6.

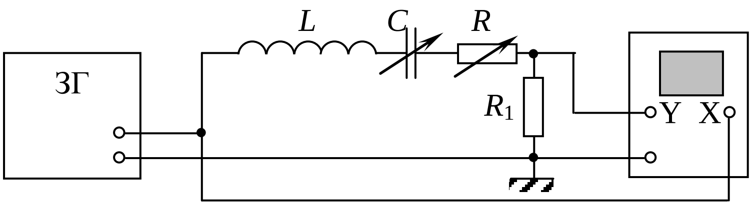

Рис. 11.6

Коливний контур складається з котушки L, магазину ємностей C, змінного резистора R та резистора R_1. Напруга на резистора R_1, яка пропорційна струму у контурі, подається на вхід "Y" електронного осцилографа, а сигнал звукового генератора – на вхід “X”. Для зняття резонансних кривих, змінюючи частоту звукового генератора ЗГ, вимірюють залежність струму в контурі від частоти генератора $I_0\left(\Omega\right)$ при різних значеннях опору резистора R.

Для вимірювання зсуву фаз ψ використовують фігури Ліссажу, які отримують на екрані осцилографа. Нехай є дві синусоїдні напруги однакової частоти Ω. Якщо їх подати на пластини вертикального і горизонтального відхилення осцилографа, то це викличе відповідні зміщення електронного променя на екрані:

по горизонталі

$$x=x_0\cos\Omega t,$$

по вертикалі

$$y=y_0\cos\left(\Omega t+\delta\right),$$

де δ – зсув фаз між напругами; x_0 та y_0 – амплітуди зміщення променя, які пропорційні амплітудам напруг та коефіцієнтам підсилення відповідних каналів осцилографа. Виключивши час з двох останніх рівнянь, отримаємо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{y}{y_0}\right)^2-\frac{2xy}{x_0 y_0}\cos\delta=\sin^2\delta. \qquad (11.17)$$

Вираз (11.17) є рівнянням еліпса, який описується електронним променем на екрані осцилографа. Якщо коефіцієнти підсилення підібрати так, щоб задовольнялася рівність $x_0 = y_0$, то рівняння (11.17) набуде вигляду

$$x^2+y^2-2xy\cos\delta=x_0^2\sin^2\delta. \qquad (11.18)$$

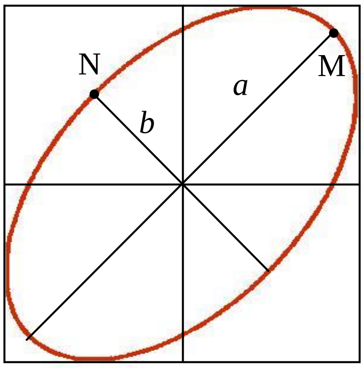

Рис. 11.7

Формула (11.18) являє собою рівняння еліпса, осі якого утворюють кути $\pi/4$ з осями координат. При $\delta=0$ еліпс вироджується у пряму $x=y$, а при $\delta=\pi/2$ – у коло радіуса $x_0=y_0$. Для точки M еліпса (див. рис. 11.7) $x=y$, $a^2=x^2+y^2=2x^2$, отже рівняння (11.18) для цієї точки

$$2x^2-2x^2\cos\delta=x_0^2\sin^2\delta \;\Rightarrow\; 2x^2\left(1-\cos\delta\right)=x_0^2\sin^2\delta$$

$$2x^2 2\sin^2\frac{\delta}{2}=x_0^2 4\sin^2\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\delta}{2} \;\Rightarrow\; a^2 2\sin^2\frac{\delta}{2}=x_0^2 4\sin^2\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\delta}{2},$$

звідки

$$a^2=2x_0^2\cos^2\frac{\delta}{2}. \qquad (11.19)$$

Аналогічно, урахувавши, що в точці N еліпса $y=-x$ (див. рис. 11.7), можна одержати

$$b^2=2x_0^2\sin^2\frac{\delta}{2}. \qquad (11.20)$$

З виразів (11.19) та (11.20) маємо

$$\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{b}{a}. \qquad (11.21)$$

Таким чином, для визначення зсуву фаз між напругами однакової частоти достатньо виміряти півосі еліпса a і b на екрані осцилографа. У формулі (11.13) зсув фаз був позначений φ_1, отже

$$\psi=2\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a}. \qquad (11.21а)$$

Для отримання фігур Ліссажу на вхід ”Y” осцилографа подається напруга з резистора R_1, яка пропорційна струму, а на вхід "X" – напруга зі звукового генератора. У результаті вимірювань та розрахунків за формулою (11.21a) отримуємо кут ψ – зсув фаз між струмом у контурі та зовнішньою ЕРС.

Порядок виконання роботи

Перевірити електричну схему дослідної установки, показану на рис. 11.8.

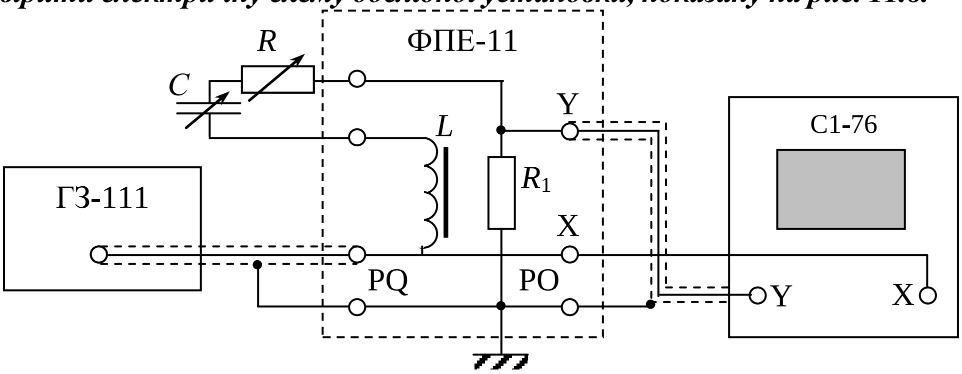

Рис. 11.8

Завдання 1. Зняття резонансних кривих.

1. Встановити на магазині ємностей ємність $C = 3 \cdot 10^{-3}$ мкФ, а на магазині опорів опір $R = 1$ Ом.

2. Увімкнути лабораторний стенд і прилади. Подати зі звукового генератора сигнал частотою 10 кГц на вхід “Y” осцилографа. На екрані осцилографа повинне з'явитися зображення синусоїди. Ручками “Яркость”, “Фокус” та “Синхронизация” добитися стійкого зображення.

3. Плавно змінюючи частоту генератора знайти частоту $f_{рез}$ при якій амплітуда синусоїди максимальна (резонансна частота).

4. Обертаючи ручки “Усиление” на передній панелі осцилографа досягти того, щоб синусоїда при частоті $f_{рез}$ займала весь екран.

5. Встановити частоту сигналу генератора 2 кГц. Виміряти амплітуду А синусоїди в поділках шкали. Занести в Таблицю 11.1 значення частоти генератора (2 кГц), відповідну амплітуду A та коефіцієнта підсилення $\text{К}_\text{у}$ у В/поділ.

6. Виміряти амплітуди синусоїди при інших значеннях частот у діапазоні від 2 до 16 кГц. Частоту змінювати з інтервалом 1-2 кГц, а ***поблизу резонансу з інтервалом 0,5 кГц***. Результати занести в таблицю 11.1.

7. Розрахувати і занести в Таблицю 11.1 амплітуди струму I_0 в контурі, розрахувавши їх за формулою

$$I_0 = \frac{A \cdot \text{К}_\text{у}}{R_1},$$

де $R_1 = 100$ Ом.

8. Встановити значення опору магазину $R = 500$ Ом. Провести вимірювання згідно пп..5 – 7. Результати занести у Табл.11.1.

9. Встановити значення опору магазину $R = 3000$ Ом. Провести вимірювання згідно п.п. 5 – 7. Результати занести у Табл.11.1.

10. Побудувати на одному графіку залежності I_0 від частоти для різних значень R.

11. За графіками визначити ширину резонансної кривої на рівні $I_0/\sqrt{2}$ (див. рис. 11.5) та обчислити добротність контуру за формулою $Q = f_{рез}/\Delta f$.

Табл. 11.1

R = 1 Ом	f, кГц																	
	А, поділ																	
	$K_у$ В/поділ																	
	I_0, мА																	
R = 500 Ом	f, кГц																	
	А, поділ																	
	$K_у$ В/поділ																	
	I_0, мА																	
R = 3000 Ом	f, кГц																	
	А, поділ																	
	$K_у$ В/поділ																	
	I_0, мА																	

Завдання 2. Визначення залежності резонансної частоти *f* від ємності *C*.

1. Встановити на магазині ємностей ємність $C = 1\cdot10^{-3}$ мкФ, а на магазині опорів опір $R = 1$ Ом.

Перемикач “Развертка” на правій панелі осцилографа перевести в положення “Х”. На екрані осцилографа повинен спостерігатися еліпс.

2. Змінюючи частоту звукового генератора добитися перетворення еліпса на пряму, розташовану приблизно під кутом $45°$ до осі Х. При необхідності змінити $К_у$. При цьому частота генератора дорівнює резонансній частоті $f_{рез}$. Значення С і $f_{рез}$ занести до Табл.2.

3. Виміряти $f_{рез}$ згідно з п.2 при інших значеннях ємності від $1\cdot10^{-3}$ до $1\cdot10^{-2}$ мкФ з інтервалом $1\cdot10^{-3}$ мкФ.

Результати занести в Табл.11.2.

4. Обчислити значення величини $z = 1/\left(2\pi f_{рез}\right)^2$. Побудувати графік залежності величини z від C, який повинен мати вигляд прямої, що проходить через початок координат.

Будуючи графік треба мати на увазі наступне: точність значень ємності , які встановлюються на магазині ємностей, складає 5%, тому графік на графіку треба зобразити межі, у яких може лежати значення C, як це показано на рис. 11.9. При цьому дійсна залежність $z(C)$ повинна лежати між прямими 1 і 2 перша з яких (пряма 1) не виходить за нижні межі значень

C, друга (пряма 2) – за верхні межі значень C. Побудуйте обидві ці прямі.

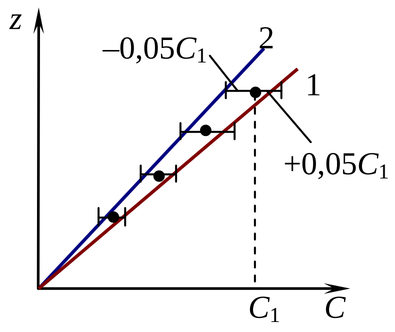

Рис. 11.9

5. Розрахуйте значення індуктивності котушки як тангенс кута нахилу прямих на графіку $z(C)$:

$$L = \frac{\Delta Z}{\Delta C}; \quad \langle L \rangle = \frac{L_1 + L_2}{2},$$

де L_1, L_2 визначаються відповідно за прямими 1 та 2.

Оцініть похибку визначення L:

$$\delta = \frac{\Delta L}{\langle L \rangle} = \frac{L_2 - \langle L \rangle}{\langle L \rangle}.$$

Табл..11.2

$C \cdot 10^9$ Ф										
$f_{\text{рез}}$, кГц										
$z \cdot 10^{10}$										

Контрольні запитання

1. Вивести формулу залежності амплітуди струму у коливному контурі від частоти зовнішньої ЕРС.
2. Що таке векторна діаграма для струмів і напруг? Який вигляд має векторна діаграма для послідовного коливального контуру?
3. Вивести формулу для розрахунку кута зсуву фаз за допомогою фігур Ліссажу.
4. Що називається резонансом? Який вигляд має векторна діаграма при частоті, що дорівнює резонансній?
5. Що таке добротність коливного контуру?
6. Показати, що резонанс для струму настає за частоти зовнішньої ЕРС $\Omega = \omega_0$.

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. В 3 т. Т.2. Електрика і магнетизм. К.: Техніка. 2001 р.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. -М.: Высш.шк.,1989. -Т.2.
3. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. -М.:Наука,1973.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. -М.: Наука, 1977.-Т.3.