МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ, НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Г. Ю. Лаванов, Г. Б. Бордюг, І. А. Сліпухіна

ФІЗИКА. ТЕОРІЯ ПОХИБОК

Лабораторний практикум для студентів технічних спеціальностей.

Київ - 2012

УДК 53.082.1(076.5)
ББК В3я7
Ф503

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету 2011 року.

Ф503 Фізика. Теорія похибок: Лабораторний практикум/ Уклад.: Г. Ю. Лаванов, Г. Б. Бордюг, І. А. Сліпухіна – К. : НАУ, 2012. – 52 с.

Рецензенти: канд. В.І. Оглобля – канд. фіз-мат. наук, доц.; Т.М. Засєкіна – канд. пед. наук, ст. наук. співроб.; Б.Ф. Лахін – канд. техн. наук, доц.

Викладено основні питання метрології, статистичного опису результатів прямих, непрямих та сукупних вимірів. Детально розглянуто питання розподілу випадкових похибок. Наведено відомості й рекомендації із застосування емпіричних формул, визначення їхніх параметрів, а також аналіз даних експерименту. Містить приклади розрахунків похибок у межах лабораторного практикуму з курсу загальної фізики. Показано використання основних опцій програми *Microcal Origin* 7.0 для оброблення та візуалізації статистичних даних.

ВСТУП

«Наука починається…з тих пір, як починають вимірювати; точна наука немислима без міри»
Д. І .Менделєєв [1]

Лабораторні заняття з фізики у вищих навчальних закладах, зокрема технічного профілю, мають на меті поглибити теоретичні знання студентів, пов'язати їх з практикою, ознайомити студентів із класичними та сучасними технічними засобами і методами дослідження, а також сприяти докладнішому вивченню фізичних понять, явищ, законів.

Фізика – одна з найважливіших галузей сучасного природознавства – є дослідною наукою. Дослід, поряд із спостереженням, є формою емпіричного пізнання об'єктивної реальності, одним з основних методів наукового дослідження.

Наукове спостереження полягає в цілеспрямованому і планомірному сприйманні властивостей предметів і явищ для одержання відповідної інформації про об'єкт пізнання за допомогою органів чуття. У реалізації наукового спостереження значну роль відіграє теоретичне мислення. Дослідник не просто реєстратор фактів. Він свідомо відшукує їх, керуючись певною ідеєю, гіпотезою, тощо.

Спостереження можна поділити на *безпосередні* та *посередні*. Останні відіграють досить важливу роль у сучасній фізиці. Під час посередніх вимірювань спостерігається власне не сам об'єкт або процес, а ефект його взаємодії з іншими об'єктами або процесами, наприклад, спостереження заряджених елементарних частинок у камері Вільсона за їхніми треками, які є сукупністю краплинок рідини.

Експеримент ґрунтується на забезпеченні відтворення явища в штучних (лабораторних) умовах (йдеться також про забезпечення активного впливу на хід явищ та процесів) і супроводжується вимірюваннями та математичним обробленням даних. За структурою експеримент суттєво відрізняється від спостереження наявністю спеціальних матеріальних засобів (експериментальних установок і приладів), впливу на досліджувані об’єкти або процеси.

Експеримент має вирішальне значення для пізнання навколишньої природи, по-перше, як первинне джерело пізнання і, по-друге, як критерій істинності гіпотез, теорій. Він також відіграє величезну роль при формуванні нових гіпотез та теоретичних уявлень. У свою чергу, без теорії та її спрямовуючих ідей неможливий науковий експеримент. Отже, теоретичні та емпіричні методи дослідження перебувають у діалектичному взаємозв’язку та взаємодії.

Вимірювання належить до числа найдавніших операцій, які використовуються людиною в загальній практиці. Розвиток науки, техніки, автоматизації виробничих процесів, розумна експлуатація різних складних об’єктів і пристроїв нерозривно пов’язані з розвитком і вдосконаленням вимірювань і вимірювальної техніки.

Вимірювання тієї чи іншої величини – основа будь-якого експериментального досліду, в тому числі і будь-якої лабораторної роботи. Достовірність результатів експерименту, розмірковування про нормальну роботу агрегатів і пристроїв залежать від якості виконаних вимірів[1].

Кожному інженерові, а тим більше інженеру цивільної авіації, який у майбутньому керуватиме складною авіаційною технікою, необхідно знати основні положення метрології та вміти правильно обирати метод вимірювань, записувати і обробляти результати спостережень, проводити критичну оцінку отриманих результатів.

1. Фізичні величини та їх вимірювання

У фізиці особливого значення набуло поняття про фізичну величину. Відповідно до Державного стандарту України [2], *фізична величина* – це властивість, загальна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їхніх станів та процесів, які в них відбуваються), але в кількісному відношенні індивідуальні для кожного об'єкта.

Наприклад, тіла, процеси, явища можна характеризувати різними загальними властивостями – фізичними величинами: масою, електричним опором, температурою, освітленістю тощо. За однаковими фізичними величинами, які називають *однорідними*, можна порівнювати різноманітні тіла, але для цього потрібно ввести кількісні критерії фізичних величин – розмір і значення фізичної величини.

Розмір фізичної величини дає уявлення про кількісний зміст властивості в даному об'єкті, що відповідає даній величині. Небажано вживати вираз «величина тиску», «величина струму» та ін., тому що ці властивості вже є величинами. У цих випадках слід вживати поняття розміру фізичної величини. Для оцінювання фізичної величини в певних одиницях вимірювань використовують таке поняття, як *значення* фізичної величини. Наприклад, 20 м, 30 А, 300 К – відповідні значення довжини, струму і температури.

Потрібно розрізняти істинне та дійсне значення фізичної величини. *Істинне* значення фізичної величини – це значення величини, яке ідеально відображає в якісному та кількісному відношеннях відповідну властивість об'єкта і яке нам не відоме. Це абсолютна істина, до якої ми наближаємося у процесі пізнання. *Дійсне* значення фізичної величини – це значення величини, знайдене експериментально і настільки наближене до істинного значення, що для даної мети може бути використане замість нього.

Процес вимірювання – це фізичний експеримент: вимірювання не може бути здійснене шляхом тільки одних теоретичних викладень, міркувань, тощо. В загальному випадку результат вимірювання може бути записаний у вигляді рівняння:

$$x = n\,\alpha_0,$$

де x – величина, що вимірюється; n – числове значення величини, що вимірюється; α_0 – одиниця вимірювання. Це рівняння називається *основним рівнянням вимірювання*. Далеко не кожна величина, що нас цікавить, може бути безпосередньо виміряна, наприклад, густина, питомий електричний опір, тощо. Внаслідок цього мета вимірювання та безпосередній об'єкт вимірювання в загальному випадку можуть бути різними, що визначає різницю між вимірюванням і вимірювальним процесом. Вимірювання починається зі встановлення *мети вимірювання*, тобто шуканої величини. На підставі аналізу характеру цієї величини встановлюється безпосередній *об'єкт вимірювання*. Далі за допомогою вимірювального процесу отримують результат спостереження (*вимір*).

Залежно від характеру фізичного зв'язку між шуканою та вимірюваною величинами, а також від способу отримання результату вимірювання розрізняють три види вимірювань: *прямі, непрямі, сукупні*.

Прямі (безпосередні) вимірювання – це такі вимірювання, при яких експериментатор безпосередньо за допомогою вимірювальних засобів отримує саме ту величину, що його цікавить. Математичний зв'язок між шуканою і вимірюваною величинами має вигляд:

$$Y = x,$$

де Y – шукана величина, x – величина, що вимірюється. Прикладом прямого вимірювання є вимір довжини тіла лінійкою, маси – за допомогою терезів тощо. Прямі виміри широко застосовуються у машинобудуванні, а також при контролі технологічних процесів (вимірювання тиску, температури та ін.)

Непрямі (посередні) вимірювання – такі вимірювання, під час яких сама величина не вимірюється безпосередньо, а обчислюється за формулами, що виражають залежність між шуканою величиною і величинами, які визначаються прямими вимірюваннями. Математичний зв'язок між шуканою і вимірюваною величиною має вигляд:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де Y – шукана величина $x_1, x_2, \dots . x_n$ – значення ряду величин, отриманих на підставі прямих вимірювань. Приклади посередніх вимірювань: визначення об’єма тіла за його геометричними розмірами, знаходження питомого електричного опору провідника за його опором, довжиною та площею поперечного перетину тощо.

Сукупні вимірювання – такі вимірювання, під час яких результат вимірювання отримують на підставі розв’язання систем рівнянь, що виражають функціональну залежність між шуканими і безпосередньо виміряними величинами. Математичний зв'язок між шуканими і виміряними величинами має вигляд:

$$f_1(y_1, y_2, \dots y_n, x_1, x_2, \dots x_m) = 0;$$
$$f_2(y_1, y_2, \dots y_n, x_1, x_2, \dots x_m) = 0;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_k(y_1, y_2, \dots y_n, x_1, x_2, \dots x_m) = 0,$$

де $y_1, y_2, \dots, y_n$ – значення шуканих величин; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення величин, які визначають шляхом прямих або непрямих вимірювань. Прикладом може бути знаходження опорів двох резисторів за вимірами опорів при їхньому послідовному і паралельному з’єднаннях, або знаходження маси окремих важків із набору (калібрування за відомою масою одного з них і за результатами прямих порівнянь мас різних комбінацій цих важків).

2. Теорія похибок (основні відомості)

2.1. Похибки та їх класифікація

Чисельне значення фізичної величини отримують шляхом її вимірювання, тобто порівняння її з іншою величиною того ж типу, прийнятою за одиницю. У вибраній системі одиниць результати вимірювань виражаються певними числами. Відомо, що при достатньо точних вимірюваннях однієї і тієї ж величини результати окремих вимірювань відрізняються одне від одного, отже, містять *похибки*.

Похибкою вимірювання називається різниця між результатом вимірювання x й істинним значенням a шуканої величини. Похибка вимірювання звичайно невідома, як невідоме й істинне значення величини (виключення складають вимірювання відомих величин, проведені зі спеціальною метою дослідження похибок, наприклад, для визначення точності вимірювальних приладів). Одним із основних завдань математичної обробки результатів експерименту є оцінка істинного значення величини за отриманими результатами. Іншими словами, після неодноразового вимірювання величини a і отримання ряду результатів, кожний з яких містить деяку невідому похибку, ставиться завдання обчислення наближеного значення a з якомога меншою похибкою. Тому при вирішенні такого роду задачі та при заданій точності вимірювань треба знати основні властивості похибок вимірювань і вміти ними користуватися.

Абсолютно точно виміряти будь-яку фізичну величину неможливо, оскільки немає приладів, що дають абсолютно точні значення, а також через недосконалість методів вимірювань, наших органів чуття і впливу низки інших чинників. Якими б точними не були прилади, експериментатор завжди буде отримувати наближене значення фізичної величини, тобто припускатиметься похибок.

Величина похибки визначає межі, в яких знаходиться істинне значення вимірюваної величини. Тому при будь-якому вимірюванні необхідно визначити як чисельне значення величини, що вимірюється, так і його похибку.

Залежно від вигляду та причин, що їх викликають, похибки поділяють на три групи: *систематичні, випадкові, промахи.*

*Систематична похибка***.** Джерелом цих похибок вимірювання є велика кількість різноманітних причин (чинників). Іноді в серії проведених експериментів вдається виділити такі причини похибок, ефект дії яких може бути оцінений (розрахований). Простим прикладом може служити такий факт. Нехай в ході проведення експерименту був неправильно проградуйований прилад, за допомогою якого було проведено вимірювання. Останнє призводить до того, що зміщується нуль відліку, і тому всі дані, які були отримані таким приладом, будуть зміщені або на постійну величину (якщо шкала приладу рівномірна) або на величину, що змінюється за певним законом (якщо шкала приладу нерівномірна).

Іншим прикладом може служити зміна зовнішніх умов (наприклад, температури), якщо відомий вплив цих змін на результати вимірювань. До перерахованих причин можна віднести також деяку недосконалість вимірювальних приладів на межі області застосовності, яка викликає відомі похибки. Виявлення систематичних похибок, що викликаються кожним окремим чинником, вимагає спеціальних досліджень (прикладом може бути вимірювання однієї і тієї ж величини різними методами або вимірювання одним і тим же приладом деяких еталонів, відомих величин). Тому, як тільки систематичні похибки знайдені, їхня величина оцінена (розрахована), то вони можуть бути легко усунені шляхом введення відповідних поправок у результати вимірювання.

Правильність вимірювання — це якість вимірювання, яка відображає близькість до нуля систематичної похибки. Малі значення систематичної похибки є свідченням правильності вимірювань.

Нехай x – істинне значення шуканої величини; $\tilde{x}$ – значення цієї величини, яке відповідає прямому математичному опису; $\widetilde{x_h}$ – значення величини, яке отримане за припущення відсутності округлення; $\widetilde{x_h^*}$ – значення, отримане при обчисленнях. Розрізняють такі види систематичних похибок:

1. *Похибки методу або теоретичні похибки*, які пов'язані з тим, що точна математична дія та початкові дані замінюються наближеними. Наприклад, замінюють інтеграл сумою, похідну – різницею, функцію – многочленом тощо. Похибку методу доцільно вибирати так, щоб вона була в 2–5 разів менше неусувної похибки. Велика похибка методу знижує точність відповіді, а помітно менша вимагає збільшення обсягу обчислень. Математично похибку методу можна записати так:

$$\delta x_1 = \widetilde{x_h} - \tilde{x}.$$

1. *Неусувна похибка* – це різниця між значенням, отриманим в ході безпосереднього математичного розрахунку, і точним значенням, тобто

$$\delta x_2 = \tilde{x} - x.$$

2. *Обчислювальна похибка* – це різниця між наближеним розв’язком, отриманим при обчисленнях, і значенням, отриманим в припущенні відсутності округлень, тобто

$$\delta x_3 = \widetilde{x_h^*} - \widetilde{x_h}.$$

4. *Інструментальна похибка* – похибка, яка зумовлена похибкою засобу вимірювання і пов’язана з особливостями його конструкції. До інструментальних похибок належать похибки схеми та технологічні похибки. Похибки схеми характеризуються самою структурною схемою засобів вимірювання. Технологічні похибки

виникають унаслідок неточності виготовлення окремих елементів. У багатьох випадках до приладів додаються паспортні дані, в яких вказуються величини похибок (клас точності приладу, найбільша абсолютна похибка та ін.). Цю похибку можна також оцінити для більшості приладів як половину ціни найменшої поділки шкали. Така оцінка справедлива для лінійки, штангенциркуля, мікрометра тощо (у разі електричних приладів методика оцінки похибки дещо інша).

Повна похибка ($\delta x_0 = \widetilde{x_h^*} - x$) дорівнює різниці між реально отриманим і точним значенням, та виражається рівністю

$$\delta x_0 = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3.$$

*Випадкова похибка***.** Похибки вимірювання, що залишилися після того, як були виявлені, усунені або виправлені шляхом введення відповідних поправок всі систематичні похибки, називають *випадковими.* Вони обумовлені сукупною дією різнорідних непостійних чинників, ефекти дії яких такі незначні, що їх не можна виділити та врахувати окремо. Випадкову похибку можна розглядати як *сумарний* ефект дії найрізноманітніших випадкових поєднань таких чинників. Це й обумовлює випадковий характер даних похибок. Випадкова похибка є неусувною похибкою, її не можна виключити в кожному результаті вимірювання.

Оцінюючи такий клас похибок, необхідно застосовувати деякі висновки з теорії ймовірностей. Саме на цій підставі можна оцінити значення вимірюваної величини зі значно меншою похибкою, ніж похибка окремого вимірювання. Врахування впливу випадкових похибок ґрунтується на знанні законів їхнього розподілу. Випадкову похибку можна оцінити на підставі кількох вимірів, яких повинно бути більше одного. В цьому випадку розрахунок впливу випадкової похибки ускладнюється, оскільки ми маємо справу з дуже малою вибіркою даних[1]. Критерієм застосовності може бути розподіл виду χ^2 (критерій Пірсона) або деякі інші критерії, які дають можливість на підставі малої вибірки даних зроби-

[1] Вибірка – множина вимірів, яка за допомогою певної процедури вибрана з генеральної сукупності для участі в дослідженні. Генеральна сукупність (в англ. – population) – сукупність всіх вимірів, відносно яких потрібно зробити висновки при вивченні конкретної проблеми.

ти висновок про ступінь впливу випадкової похибки. Однак такі методи надто перевантажені математичними розрахунками й складають предмет дослідження в теорії ймовірностей і математичній статистиці, які виходять за межі викладення цього лабораторного практикуму. Більш детально критерій Пірсона буде розглянуто в розділі 3, а для ґрунтовнішого вивчення рекомендуємо, наприклад, [3–11] та ін.

Розгляд достатньо великого числа вимірювань, проведених в однакових умовах, дозволяє вказати можливі межі похибок, тобто скласти уявлення про ступінь точності та достовірності результатів вимірювання.

Збіг вимірювань — це якість, яка відображає близькість один до одного результатів вимірювань, що виконуються в однакових умовах. Малі значення випадкових похибок є свідченням високого збігу результатів повторних вимірювань.

Відтворюваність вимірювань — це якість вимірювання, яка відображає близькість один до одного його результатів, здобутих у різний час, у різних місцях і різними методами та засобами.

Промахом прийнято називати окремі особливо великі похибки, які явно спотворюють результати вимірювання і виникають у більшості випадків унаслідок окремих грубих похибок або в результаті недбалості проведення вимірювань. Зовнішньою ознакою результату, що містить грубу похибку, є його значна відмінність за величиною від результатів решти вимірювань. Виявивши грубу похибку, результат вимірювання слід відкинути, а саме вимірювання повторити (якщо це можливо). Якщо результат вимірювання не можна не брати до розгляду, то з ним потрібно виконати деякі математичні дії. Застосування математичного апарату теорії ймовірностей дозволяє визначити, чи є це значення промахом або якимось іншим видом похибок. При цьому застосовуються різні критерії залежно від того, відома чи ні середня квадратична похибка вимірювань (передбачається, що всі вимірювання проводяться з однією й тією ж точністю і незалежно один від одного). Критерій визначення грубої похибки та спосіб її оцінки, докладніше розглянуті в розділі 3.

2.2. Похибки прямих вимірювань

У *прямих вимірюваннях* значення шуканої величини отримують безпосередньо з досліду. Нехай x – точне значення, а x^* – наближене значення деякої величини. Модуль різниці між цими величинами називається *граничною абсолютною похибкою числа* x^*, тобто:

$$|x^* - x| \le \Delta(x^*). \tag{2.1}$$

Відповідно, вираз

$$x^* - x \le \delta(x^*)$$

визначає абсолютну похибку, яка є однією з характеристик точності чисел. Очевидно, вона представляє тільки теоретичний інтерес, оскільки точного значення x ми в більшості випадків не знаємо. Але ми можемо вказати межі, в яких змінюється абсолютна похибка. Ці межі визначаються тим способом, яким ми отримали наближене значення x^*.

Як видно з (2.1) точне значення x лежить, очевидно, в межах:

$$x^* - \Delta(x^*) \le x \le x^* + \Delta(x^*).$$

Абсолютна похибка має розмірність вимірюваної величини. Запис $x = (0{,}78 \pm 0{,}02)$мм означає, що вимірювана величина x визначена лише в інтервалі $0{,}76 \le x \le 0{,}80$ мм.

Абсолютна і гранична абсолютна похибки не характеризують точність результату. Нехай, наприклад, точність амперметра становить ± 0,1 А. При двох різних вимірюваннях маємо такі значення: (35,0 ± 0,1) А і (0,2 ± 0,1) А. Отже, при однакових абсолютних похибках (± 0,1 А) у першому випадку вимірювання досить точні, а у другому – вони дозволяють зробити висновок лише про порядок величини.

Тому існує ще одна характеристика точності проведеного експерименту – *відносна похибка* – відношення абсолютної похибки до абсолютного значення наближеної величини:

$$\varepsilon_\delta = \frac{\delta(x^*)}{|x^*|}.$$

В такий же спосіб визначимо *граничну відносну похибку*:

$$\varepsilon_{\Delta} = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|}.$$

На відміну від абсолютної похибки, яка частіше всього буває розмірною величиною, відносна похибка буде величиною безрозмірною.

Точність вимірювань відображає близькість виміряного та істинного значень і є величиною, оберненою до відносної похибки.

Нехай величину *x* виміряли *n* разів і отримали ряд значень $x_1, x_2, .., x_n$, тоді її середнє арифметичне значення:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Воно тим ближче до істинного значення вимірюваної величини, чим, власне, більше вимірювань виконано. Кожний окремий вимір $x_1, x_2, .., x_n$ відрізняється від середнього значення (середнього арифметичного) на величину:

$$\delta x_1 = x_1 - \bar{x};\ \delta x_2 = x_2 - \bar{x}; .....\delta x_n = x_n - \bar{x}.$$

Останню систему запишемо в більш компактному вигляді:

$$\delta x_i = x_i - \bar{x} \qquad (2.2)$$

і називатимемо *абсолютними похибками окремих вимірювань*.

2.3. Похибки непрямих вимірювань

У більшості випадків шукану величину виміряти безпосередньо не вдається: доводиться вимірювати інші величини, функціонально пов'язані з нею, що математично записується у вигляді формул. Таке вимірювання називається *непрямим* (посереднім). І тому похибка визначення цієї величини залежить у цьому випадку як від величин, які визначаються у прямий спосіб, так і від математичних операцій, які були проведені з цими величинами.

Нехай деяка шукана величина y є функцією декількох змінних x_1, x_2, x_3, які безпосередньо визначаються в ході експерименту, причому абсолютні похибки (2.2) відповідно рівні:

$$\pm\delta x_1, \pm\delta x_2, \pm\delta x_3\ . \qquad (2.3)$$

Розглянемо найпростіші випадки функціональних залежностей.

1. *Похибка суми.* Нехай початкова функція має вигляд

$$y = x_1 + x_2 + x_3. \qquad (2.4)$$

Знайдемо похибку Δy, яку матиме величина y. Нехай відомі наближені значення x_1^*, x_2^*, x_3^* доданків і граничні абсолютні похибки $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$, тоді з (2.3) і (2.4) отримаємо:

$$y \pm \delta y = (x_1 \pm \delta x_1) + (x_2 \pm \delta x_2) + (x_3 \pm \delta x_3).$$

Розкриваючи дужки і віднімаючи почленно від цього рівняння (2.4), остаточно отримаємо:

$$\pm \delta y = \pm \delta x_1 \pm \delta x_2 \pm \delta x_3. \qquad (2.5)$$

Величини похибок, що входять в (2.5), можуть мати різні знаки, тому абсолютна похибка суми (2.3) буде максимальною, коли всі похибки матимуть один і той же знак:

$$\Delta y = \Delta(x_1) + \Delta(x_2) + \Delta(x_3). \qquad (2.6)$$

Ця похибка називається *граничною* або *максимальною* абсолютною похибкою. З (2.1) і (2.3) випливає, що *гранична абсолютна похибка суми не більша за суму граничних абсолютних похибок складових.*

Розглянемо відносну похибку. Для цього, згідно з визначенням, поділимо (2.5) і (2.6) на (2.4), внаслідок чого отримаємо:

$$\varepsilon_\delta = \frac{\delta y}{|y|},$$

$$\varepsilon_\Delta = \frac{\Delta y}{|y|}. \qquad (2.7)$$

Вираз (2.7) показує, з якою максимальною точністю ми можемо оцінити похибку суми.

2**.** *Похибка різниці***.** Нехай шукана функція має вигляд:

$$y = x_1 - x_2 - x_3. \qquad (2.8)$$

Як і в попередньому випадку шукатимемо граничну абсолютну похибку Δy. Для цього вважатимемо, що відомі наближені значення x_1^*, x_2^*, x_3^* доданків та їхні абсолютні похибки $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$:

$$y \pm \delta y = (x_1 \pm \delta x_1) - (x_2 \pm \delta x_2) - (x_3 \pm \delta x_3). \qquad (2.9)$$

Віднімаючи (2.9) – (2.8), отримаємо:

$$\pm \delta y = (\pm \delta x_1) - (\pm \delta x_2) - (\pm \delta x_3). \qquad (2.10)$$

У (2.10) при визначенні абсолютної похибки необхідно вибрати знаки такими, щоб δy була найбільшою. В цьому випадку похибка буде максимальною тільки тоді, коли знаки перед доданками $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ будуть однаковими, тобто:

$$\pm\delta y = (+\delta x_1) - (-\delta x_2) - (-\delta x_3). \qquad (2.11)$$

Таким чином, максимальна абсолютна похибка набуває вигляду:

$$\Delta y = |\delta x_1| + |\delta x_2| + |\delta x_3| . \qquad (2.20)$$

Із (2.11) видно, що *гранична абсолютна похибка різниці* дорівнює сумі модулів абсолютних похибок складових величин, які входять у цю різницю (2.8). В такому випадку максимальна відносна похибка буде:

$$\varepsilon_\Delta = \frac{|\Delta y|}{|y|} = \frac{|\delta x_1| + |\delta x_2| + |\delta x_3|}{|x_1 - x_2 - x_3|}.$$

Останній вираз можна узагальнити й на випадок, коли шукана функція y містить різницю і суму декількох змінних. В цьому випадку процедура знаходження виразу для абсолютної похибки така, як і для попередніх випадків. Але при цьому знаки для визначення граничної абсолютної похибки повинні бути такими, щоб похибка була максимальною.

Проілюструємо це на простому прикладі. Нехай величина виражається такою залежністю

$$y = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Тоді, якщо відомі значення $\pm\delta x_1, \pm\delta x_2, \pm\delta x_3, \pm\delta x_4$, складемо вираз:

$$y \pm \delta y = (x_1 \pm \delta x_1) - (x_2 \pm \delta x_2) + (x_3 \pm \delta x_3) - (x_4 \pm \delta x_4) .$$

Віднімаючи від останнього рівняння початкове, одержуємо вираз для абсолютної похибки:

$$\pm\delta y = (\pm\delta x_1) - (\pm\delta x_2) + (\pm\delta x_3) - (\pm\delta x_4).$$

Як видно з останнього рівняння, похибка буде максимальною тоді, коли перед від'ємниками будуть знаки «–». Отже, можемо записати:

$$\Delta y = |\delta x_1| + |\delta x_2| + |\delta x_3| + |\delta x_4|.$$

Тоді вираз для відносної і максимальної відносної похибки набуває вигляду:

$$\varepsilon_\delta = \frac{\delta y}{|y|} \; ; \qquad \varepsilon_\Delta = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\delta x_i|}{|y|}.$$

2. *Похибка добутку.* Нехай $y = x_1 \cdot x_2$ і $\pm\delta x_1, \pm\delta x_2$ – похибки величин x_1 та x_2. Запишемо цей добуток з урахуванням похибок:

$$y \pm \delta y = (x_1 \pm \delta x_1) \cdot (x_2 \pm \delta x_2).$$

Розкриваючи дужки в останньому виразі, отримаємо:

$$y \pm \delta y = x_1 \cdot x_2 \pm x_1 \cdot \delta x_2 \pm x_2 \cdot \delta x_1 \pm \delta x_1 \cdot \delta x_2. \qquad (2.12)$$

Досить часто похибки $\pm\delta x_1, \pm\delta x_2$ є дуже малими порівняно з самими величинами. Як випливає з курсу вищої математики, добуток двох (і більше) величин однакової малості є величина нескінченно мала вищого порядку. На цій підставі добутком $\delta x_1 \cdot \delta x_2$ в останньому виразі можна знехтувати. Проте, відкидаючи останній доданок, ми одержуємо неточну (наближену) рівність. Величини, які входять до (2.12), для найбільшої похибки повинні мати однакові знаки. Враховуючи це, відкидаючи останній доданок і виконуючи ту ж саму процедуру, що і для інших похибок, отримаємо:

$$\pm\delta y = \pm(x_1 \cdot \delta x_2 + x_2 \cdot \delta x_1).$$

Тоді максимальна абсолютна похибка похибки добутку, набуває вигляду:

$$\Delta y \approx |x_1 \cdot \delta x_2| + |x_2 \cdot \delta x_1| \,. \qquad (2.13)$$

Знак строгої рівності замінений на наближене на тій підставі, що при виведенні (2.13) ми відкинули доданок $\delta x_1 \cdot \delta x_2$ оскільки вважали, що він – нескінченно мала величина. В останній рівності величини x_1, x_2 – середні значення. Отже, максимальна відносна похибка набуває вигляду:

$$\varepsilon_\Delta \approx \frac{\Delta y}{|y|} \approx \frac{|x_1 \cdot \delta x_2| + |x_2 \cdot \delta x_1|}{x_1 \cdot x_2} = \frac{|\delta x_1|}{x_1} + \frac{|\delta x_2|}{x_2}. \qquad (2.14)$$

Визначимо точну і наближену оцінки абсолютної похибки:

$$|\delta y| \le \Delta y \le |x_1| \cdot |\delta x_2| + |x_2| \cdot |\delta x_1| + |\delta x_1 \cdot \delta x_2|; \qquad (2.15\ а)$$

$$|\delta y| \le \Delta y \lesssim |x_1| \cdot |\delta x_2| + |x_2| \cdot |\delta x_1| \,. \qquad (2.15\ б)$$

Границя абсолютної похибки добутку в межах похибки співмножників визначається нерівністю (2.15 *а*); при цьому для малих δx_2 і δx_1 допустимо користуватися наближеною нерівністю (2.15 *б*).

Оскільки $\frac{|\delta x_1|}{x_1} = \varepsilon_{\Delta x_1}$ і $\frac{|\delta x_2|}{x_2} = \varepsilon_{\Delta x_2}$ є відносними похибками окремих множників, то неважко сформулювати правило оцінювання для відносної похибки:

$$\left|\frac{\delta y}{x_1 \cdot x_2}\right| \le \varepsilon_\Delta \le \varepsilon_{\Delta x_1} + \varepsilon_{\Delta x_2} + \varepsilon_{\Delta x_1} \cdot \varepsilon_{\Delta x_2}, \qquad (2.16\ а)$$

$$\left|\frac{\delta y}{x_1 \cdot x_2}\right| \le \varepsilon_\Delta \lesssim \varepsilon_{\Delta x_1} + \varepsilon_{\Delta x_2}. \qquad (2.16\ б)$$

Границя відносної похибки добутку оцінюється через межі $\varepsilon_{\Delta x_1}$ і $\varepsilon_{\Delta x_2}$ відносних похибок множників нерівністю (2.16 *а*); якщо ж відносні похибки малі, то можна користуватися наближеною нерівністю (2.16 *б*).

4. *Похибка степеня.* Нехай нам потрібно обчислити абсолютну і відносну похибки для функції вигляду: $y = x_1{}^n$, де величина $n \in Z$; Z – область цілих чисел ($n \neq 0$). Оцінимо похибку в цьому випадку. Оскільки *n* – ціле число, то початковий вираз можна записати у вигляді:

$$y = x_1^n = \prod_{i=1}^{n} x_{1_i}.$$

Якщо нам відома величина $\pm\delta x_1$, то (2.14) набуває вигляду:

$$y \pm \delta y = (x_1 \pm \delta x_1)^n.$$

Винесемо у правій частині рівняння (2.15 *а, б*) величину x_1 за дужки:

$$y \pm \delta y = x_1^n \left(1 \pm \frac{\delta x_1}{x_1}\right)^n. \qquad (2.17)$$

У (2.17) знак необхідно вибрати таким чином, щоб похибка була найбільшою. Оскільки співвідношення $\frac{\delta x_1}{x_1} \ll 1$ – це завжди нескінченно мала величина, то останній вираз можна розкласти в ряд Тейлора в точці $\frac{\delta x_1}{x_1}$. У результаті розкладання обмежимося трьома членами розкладу й отримаємо:

$$y \pm \delta y = x_1^n \left(1 + \frac{\delta x_1}{x_1}\right)^n = x_1^n \left(1 + n\frac{\delta x_1}{x_1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \cdots\right).$$

Вносячи x_1^n у дужки та віднімаючи з обох боків величину x_1^n, отримаємо вираз для абсолютної похибки:

$$\pm\delta y = n \cdot x_1^{n-1}\delta x_1 + \frac{n(n-1)}{2} x_1^{n-2}(\delta x_1)^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!} x_1^{n-r}(\delta x_1)^r. \qquad (2.18)$$

У виразі (2.18) опущений залишковий член і всі доданки є розкладом у ряд за ступенями малості. Кожний подальший член є величиною малою відповідно до попереднього. Тому всі доданки, починаючи з другого, можна відкинути, як величини нескінченно малі. В результаті чого ми отримаємо наближене співвідношення для відносної похибки:

$$\pm\delta y = \pm n \cdot x_1^{n-1}\delta x_1. \qquad (2.19)$$

Отже, максимальна абсолютна похибка рівна:

$$\Delta y = n \cdot x_1^{n-1}|\delta x_1|. \qquad (2.20)$$

Тоді відносна і максимальна відносна похибки рівні відповідно:

$$\varepsilon_{\delta y} = \frac{\delta y}{|y|} = \pm\frac{n \cdot x_1^{n-1}\delta x_1}{x_1^n} = \pm n \cdot \frac{\delta x_1}{x_1};$$

$$\varepsilon_{\Delta y} = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{n \cdot x_1^{n-1}\delta x_1}{x_1^n} = n \cdot \frac{\delta x_1}{x_1}.$$

Останні два рівняння (як, власне, й (2.19) та (2.20)) описують приблизно похибки для степеневої функції. Критерій та межі їх застосовності подібні до таких для похибок добутку.

5. *Похибка кореня*. Нехай дана функція вигляду $y = \sqrt[n]{x_1}$, яку можна переписати згідно властивості степеня у вигляді:

$$y = x_1^{\frac{1}{n}},$$

де $n \in R$ (*R* – область дійсних чисел), причому $n \neq 0$. Проводячи ті ж самі математичні викладення, що були зроблені вище, отримаємо вирази для абсолютної похибки:

$$\pm\delta y = \pm\frac{1}{n} x_1^{\frac{1}{n}-1}\delta x_1;$$

граничної абсолютної похибки:

$$\Delta y = \frac{1}{n} x_1^{\frac{1}{n}-1}|\delta x_1|;$$

відносної похибки:

$$\varepsilon_{\delta y} = \pm\frac{1}{n} x_1^{-1}\delta x_1;$$

граничної відносної похибки:

$$\varepsilon_{\Delta y} = \frac{1}{n} x_1^{-1}|\delta x_1|.$$

6. *Похибка частки*. Нехай задані функція вигляду $y = \frac{x_1}{x_2}$ і величини $\pm\delta x_1, \pm\delta x_2$. Введемо додаткову умову (припущення): $|x_2^*| > |\delta x_2|$, де x_2^* – наближене значення. Якщо останнє не виконується, то недоцільно розглядати частку, оскільки дільник x_2 може виявитися рівним нулю. Застосуємо правила знаходження похибок добутку та степеня й отримаємо з урахуванням наближеної рівності вираз для абсолютної похибки:

$$\pm\delta y = \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{\delta x_1}{x_1} - \frac{\delta x_2}{x_2}\right).$$

З останнього виразу безпосередньо випливає визначення граничної абсолютної похибки:

$$\Delta y = \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{|\delta x_1|}{x_1} + \frac{|\delta x_2|}{x_2}\right).$$

Виходячи з визначення відносної похибки та граничної відносної похибки, отримаємо:

$$\varepsilon_{\delta y} = \frac{\delta x_1}{x_1} - \frac{\delta x_2}{x_2};$$

$$\varepsilon_{\Delta y} = \frac{|\delta x_1|}{x_1} + \frac{|\delta x_2|}{x_2}.$$

2.4. Застосування методів математичного аналізу для розрахунків похибок посередніх вимірів

Вираз для похибок можна отримати за допомогою елементів вищої математики. Для цього розглянемо диференціал функції двох змінних, а потім узагальнимо на випадок багатьох змінних. Згідно з визначенням, диференціал функції є малою величиною щодо значення функції в даній точці з координатами x_1, x_2. При цьому передбачається, що величини похибок $\pm\delta x_1, \pm\delta x_2$, отримані шляхом прямих вимірювань, відомі. Отже,

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Оскільки частинні похідні, що входять в (46), можуть мати різні знаки, то останнє рівняння з точністю до знака визначає відносну похибку:

$$\pm\delta y = \pm\frac{\partial y}{\partial x_1}\delta x_1 \pm \frac{\partial y}{\partial x_2}\delta x_2.$$

Гранична абсолютна похибка буде визначена стандартним чином:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\delta x_2\right|.$$

Нехай задано функцію кількох змінних $f = f(x_1, x_2)$. Знайдемо вирази для абсолютної і відносної похибок. Як зазначалося вище, досить просто буває знайти вираз для відносної похибки, після чого шляхом деяких перетворень отримати вираз для абсолютної похибки. Оскільки нам необхідно отримати кінцевий результат як суму квадратів *дисперсій* [2](підвести до вигляду середньоквадратичного відхилення), то ми скористаємося наступним алгоритмом.

1. Піднесемо праву та ліву частини рівності до квадрату. $f^2 = f^2(x_1, x_2)$, при цьому нас не цікавитиме алгебраїчне спрощення, оскільки ця операція виправдана подальшими математичними міркуваннями.

2. Праву частину останньої рівності необхідно максимально спростити. Застосуємо на цьому етапі операцію логарифмування на тій підставі, що сама по собі вона переводить добуток (частку) в

---

[2] Поняття *дисперсії* розглядається в розд. 3.

суму (різницю), які являють, в кінцевому підсумку, складові частини похибок окремих змінних. Знайдемо натуральний логарифм від попередньої рівності: $\ln(f^2) = \ln\big(f^2(x_1,x_2)\big)$. Застосовуючи властивості логарифма, отримаємо: $2\ln(f) = 2\ln(f(x_1,x_2))$. Слід відзначити таке: при логарифмуванні досить часто, згідно з правилами, необхідно ставити знак «–» між складовими. Але, оскільки ми шукаємо похибки, а всі вони повинні додаватися, а не відніматися (в іншому випадку ми завжди зможемо вибрати початкові умови такі, що повна похибка буде мінімальна, тобто буде дорівнює 0, а це суперечить дійсності), потрібно замінити знак «–» на «+».

3. Продиференціюємо отриманий (і повністю, по можливості, спрощений) вираз. Оскільки ми маємо функцію двох змінних, то нам необхідно взяти дві похідні по змінних x_1 та x_2. Врахуємо також, що функцію задано неявно:

$$2\,\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\,\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1};\; 2\,\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2\,\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}.$$

4. Домножимо останні рівняння справа і зліва на нескінченно малі величини Δx_1 і Δx_2, які, по суті є абсолютними похибками обох змінних.

5. Складемо почленно отримані рівняння і в лівій частині винесемо спільний множник за дужки:

$$2\,\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right) = 2\,\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + 2\,\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2.$$

Вираз, що стоїть у дужках у лівій частині, є повним диференціалом від функції двох змінних. Отже, маємо:

$$2\,\frac{\Delta f}{f} = 2\,\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + 2\,\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2.$$

У межах вищої математики показано, що $\frac{\Delta f}{f} = \Delta\ln(f)$, тоді, застосовуючи властивості логарифма, отримаємо:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 = \left(\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)^2 \Delta {x_1}^2 + \left(\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)^2 \Delta {x_2}^2$$

Проводячи заміну $\left(\frac{\Delta f}{f} = \varepsilon_\Delta\right)$ в лівій частині останнього виразу і добуваючи корінь квадратний, отримаємо остаточний вираз для граничної відносної похибки непрямих вимірювань функції двох змінних:

$$\varepsilon_\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_1{}^2 + \left(\frac{1}{f(x_1,x_2)}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_2{}^2}.$$

Наведений алгоритм знаходження похибки, можна узагальнювати і на випадок функції багатьох змінних. Відмінність полягатиме в появі додаткових похідних (лінійних) за відповідними змінними, а самі дії алгоритму залишаються такими ж. Наведемо приклад.

Задача 1. Нехай задана функція, яка показує залежність густини речовини від діаметра, висоти і маси суцільного циліндра: $\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$. Потрібно знайти вираз для граничної відносної похибки.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини до квадрата і, не виконуючи ніяких перетворень (спрощень), візьмемо від обох частин логарифм натуральний, у результаті чого отримаємо:

$$\rho^2 = \left(\frac{4m}{\pi d^2 h}\right)^2;$$

$$2\ln(\rho) = 2\ln(4) + 2\ln(m) + 2\ln(\pi) + 2\cdot 2\ln d + 2\ln(h).$$

Останній вираз є функцією трьох змінних – m, d, h. Тому необхідно знайти похідну за цими змінними і записати повний диференціал. Маємо: $2\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial m} = 2\frac{1}{m}$; $2\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial d} = 2\cdot 2\frac{1}{d}$; $2\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial h} = 2\frac{1}{h}$. Домножуючи останню групу рівнянь на відповідні диференціали і почленно додаючи, отримаємо:

$$2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\Delta m + \frac{\partial \rho}{\partial d}\Delta d + \frac{\partial \rho}{\partial h}\Delta h\right) = 2\frac{\Delta m}{m} + 2\cdot 2\frac{\Delta d}{d} + 2\frac{\Delta h}{h};$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2;$$

$$\varepsilon_\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

Задача 2. Прискорення вільного падіння можна визначити за допомогою математичного маятника. Для цього необхідно провести вимірювання довжини маятника і набрати статистику випадкових величин – часу певної кількості повних коливань. Припустимо, що ми виміряли лінійкою довжину маятника $l = 2\text{ м} \pm \pm 10^{-2}\text{ м}$. Постає питання: з якою точністю треба виміряти період коливань маятника, щоб відносна похибка не перевищувала 0,01?

З формули Томсона для математичного маятника $\left(\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ виразимо прискорення вільного падіння g. Проводячи математичні операції, отримаємо: $g = \frac{4\,\pi^2\,l}{T^2}$. Вимірювання в цьому випадку будуть непрямі. Згідно з теорією, яка була викладена раніше, ми виразимо цю похибку через похибки прямих вимірювань величин l і T. Логарифмуючи останній вираз маємо:

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln\pi + \ln l - 2\ln T.$$

Знайдемо частинні похідні останнього виразу за змінними величинами l і T. Отримаємо ці похідні в явному вигляді:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{1}{l} \qquad \text{і} \qquad \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial T} = -2\frac{1}{T}.$$

Помножимо останні рівняння справа і зліва на нескінченно малі величини Δl і ΔT відповідно. Далі додамо почленно праву частину до правої, а ліву - до лівої, а також винесемо спільний множник за дужки:

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right) = \frac{\Delta l}{l} - 2\frac{\Delta T}{T}.$$

У дужках стоїть вираз повного диференціала. Тоді остаточно можемо записати: $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} - 2\,\frac{\Delta T}{T}$.

Останній вираз є відносною похибкою непрямих вимірювань. З умови задачі зрозуміло, що потрібно знайти *граничне* значення відносної похибки, яке рівне 0,01, і визначається як: $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$. З останньої рівності виразимо $\frac{\Delta T}{T}$: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta l}{l}\right)$. Підставимо числові значення і отримаємо: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\left(0{,}01 - \frac{0{,}01}{2}\right) = 0{,}0025$. Беручи до уваги значення $g = 9.81$ м/с^2 знаходимо період коливань: $T = 6.28\sqrt{\frac{2}{9.81}} = 2.9$ с. Таким чином, абсолютна похибка періоду коливань буде: $0{,}0025 = \frac{\Delta T}{2.9}$ або $\Delta T = 0{,}00725$с. Оскільки період коливань пов'язує кількість повних коливань *N* і час *t*, протягом якого здійснилась ця кількість коливань, то з останнього рівняння маємо: для того, щоб похибка вимірювань не перевищувала 0,01, необхідно, щоб виконувалося співвідношення: $N = \frac{\Delta t}{0.00725}$, де Δt – абсолютна (інструментальна) похибка секундоміра. Якщо підставити Δt = 0,05c, що відповідає деяким секундомірам, то ми отримаємо величину порядку 7 коливань $N = \frac{0.05}{0.0025} \approx 7$.

У цій роботі ми визначаємо прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника, вважаючи, що останній здійснює малі (гармонійні) коливання відносно положення рівноваги. В кожному окремому досліді ми не можемо відхиляти маятник на один і той же малий кут, як і не можемо точно виміряти інтервал часу, за який він здійснює *N* коливань. Ці величини носять випадковий характер. Тут для оброблення результату нам необхідно застосувати методи, які описані в наступному розділі.

3. Обробка статистичних даних

3.1. Короткі відомості з теорії ймовірності

Змінна величина, яка набуває різних значень (як неперервних так і дискретних) залежно від конкретного випадку, називається *випадковою величиною*. Існує відмінність у способах оцінки деяких параметрів, що характеризують випадкові величини. Найістотнішими з них є математичне очікування (середнє значення) $M(x)$, дисперсія $D(x)$ і середньоквадратичне відхилення σ. Для розгляду випадкової величини необхідно ввести в опис таку характеристику (функцію), яка б указувала на те, яким способом ця величина розподілена на даному відрізку і тим самим демонструвала зв'язок між її розподілом та ймовірністю її появи.

Припустимо, що деяка величина *X* може набувати (і набуває за виконання певних умов) значень $x_1, x_2, \dots, x_n$. Нехай при цьому ймовірності того, що *X* матиме те або інше з цих значень, відповідно рівні: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Сума цих ймовірностей $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Якщо ймовірність відома, то говорять, що розподіл випадкової величини *X* відомий, і випадкова величина *X* задана. Термін «випадкова величина» зазвичай вживають тоді, коли хочуть підкреслити, що невідомо, яким буде конкретне значення цієї величини. Випадкова величина ξ називається дискретною, якщо вона може приймати дискретну нескінченну множину значень $x_1, x_2, \dots . x_n$. Останнє твердження можна доповнити: випадкова величина називається *дискретною*, якщо значення, яких вона може набувати, можна пронумерувати[3], або, інакше кажучи, ці значення утворюють рахункову множину. Розподіл дискретної випадкової величини називають *дискретним розподілом.*

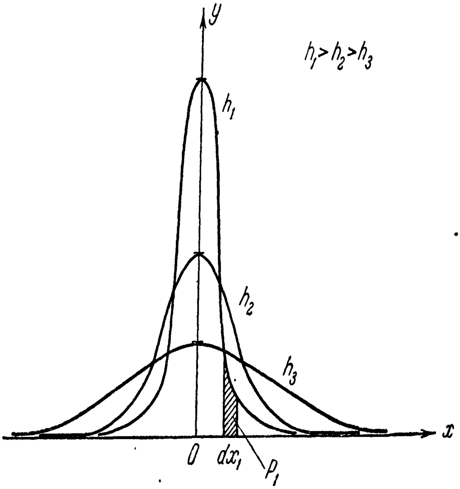


Рис. 3.1

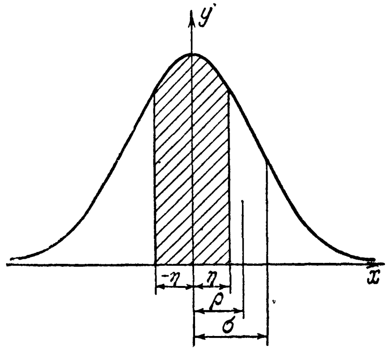


Рис. 3.2

Випадкові похибки вимірювань характеризуються певним законом їх розподілу. Наявність останнього можна виявити, якщо багато разів повторювати за незмінних умов вимірювання деякої величини, і при цьому підраховувати число m тих результатів вимірювання, які потрапляють у будь-який виділений інтервал. Відношення цього числа до загального числа n проведених вимірювань (відносна частота попадання в інтервал) при достатньо великому числі вимірювань прямує до сталого числа. Останнє дозволяє застосувати до опису випадкових похибок *методи теорії ймовірностей*.

Оскільки вимірювання з великими відхиленнями від істинної величини трапляються рідше, ніж з малими відхиленнями, а

[3] Кількість цих значень може бути і необмеженою. Необхідно, щоб був вказаний спосіб (метод) нумерації, при якому не буде пропущено жодного можливого значення випадкової величини

знаки ± відхилень рівноймовірні, то кількість похибок даної величини має бути спадною і симетричною функцією від величини випадкової похибки:

$$\Delta n = nf(x)\Delta x = n\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\Delta x \ , \qquad (3.1)$$

де x – величина похибки, $\Delta n = nf(x)\Delta x$ – кількість вимірювань з похибками, значення яких лежать між x і $x + dx$, n – повна кількість проведених дослідів.

Крива $y = f(x)$ має назву кривої Гауса або кривої нормального розподілу похибок. Ця функція нормована на одиницю (ймовірність появи випадкової величини в межах від $\pm\infty$ дорівнює 1). Величина h називається *мірою точності*. На рис. 3.1 зображено три криві Гауса з різними значеннями h. Чим більше міра точності, тим різкіше спадає крива із зростанням x, тобто тим менше отримано вимірів з великими відхиленнями. Нехай було проведено n вимірювань деякої величини N_o, і отримані значення $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$. Тоді похибки окремих вимірювань будуть відповідно рівні:

$$x_1 = N_0 - N_1; x_2 = N_0 - N_2; x_3 = N_0 - N_3; \dots\ x_n = N_0 - N_n. \qquad (3.2)$$

Ймовірність появи похибки, значення якої лежить в межах між x_1 і $x_1 + dx_1$, дорівнює відношенню кількості вимірювань з такими похибками до повної кількості вимірювань, тобто $P_1 = y_1 dx_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_1^2}dx_1$. Використовуючи теорему теорії ймовірності про те, що ймовірність спільної появи незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій, імовірність появи сукупності вимірювань з похибками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ можна записати у вигляді:

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2)} \cdot dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n.$$

Користуючись цим співвідношенням легко можна знайти найбільш імовірне значення вимірюваної величини. Позначимо його буквою N. Слід пам'ятати, що воно не дорівнює точному значенню N_o, а є лише найбільш імовірним, а отже, найбільш близьким до істинного значення, що обчислюється з результатів вимірювань. Це значення N відповідає максимальному значенню ймовірності P і, як наслідок, мінімальному значенню суми: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = \sum x_i^2$.
Для визначення величини N виразимо $\sum x_i^2$ через N та

$N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ відповідно до системи рівнянь (3.2), замінивши невідоме нам значення N_o на N. Тоді отримаємо $f(N) = \sum x_i^2 = \sum (N - N_i)^2$ і підберемо таке значення N, щоб функція $f(N)$ мала мінімум, який визначається умовою: $\frac{\partial f}{\partial N} = 2\sum_n (N - N_i) = 0$; звідки $N = \frac{\sum N_i}{n}$. З вищевикладеного випливає, що найбільш імовірне значення величини N_o, що обчислюється з серії виміряних значень $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$, є середнім арифметичним цих значень. Отже, середнє арифметичне значення величини відрізняється від будь-якого іншого виду середніх значень тим, що для нього сума квадратів похибок є найменшою. Розглянемо похибки, які належать до розподілу випадкових величин. Точність вимірювань в теорії Гауса похибок повністю визначається мірою точності h. Цю величину можна обчислити, якщо побудована крива $y = f(x)$. Проте в теорії похибок прийнято характеризувати точність вимірювань однією з трьох наступних величин: *середньою похибкою* вимірювань ρ, *середньою квадратичною похибкою* вимірювань σ та *ймовірною похибкою* вимірювань, кожна з яких може бути виражена через h.

Середня похибка вимірювань ρ за визначенням дорівнює $\rho = \pm \frac{\sum |x_i|}{n}$, звідки, використовуючи вираз (3.1), отримуємо:

$$\rho = 2\int_0^\infty x \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Середня квадратична похибка вимірювань σ визначається як

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} = 2\int_0^\infty x^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{h\sqrt{2}} = 1.25\,\rho. \qquad (3.3)$$

Ймовірною похибкою окремого вимірювання η називають похибку такої величини, яка ділить всі n випадкових похибок для n вимірювань на дві рівні частини: одна половина всіх вимірювань має похибки, менші за η, а інша половина – більші за η. Це означає, що η дорівнює такому значенню абсциси кривої Гауса, при якому площа під кривою, обмежена значеннями ± η, дорівнює половині всієї площі:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2},$$

звідки

$$\eta = 0.6745\frac{1}{h\sqrt{\pi}} = 0.6745\sigma$$

Слід зазначити, що x_i у формулі (3.2) позначає різницю виміряного *i*-го та істинного значень вимірюваної величини, а ми завжди обчислюємо близьку до неї, але не точно рівну їй різницю між середнім значенням N і виміряним значенням величини. Точне врахування цього факту приводить до необхідності заміни n на $(n-1)$ в знаменнику формули (3.3), так що $\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}}$. Фізичний зміст величин ρ, σ та η можна зрозуміти з рис. 3.2, де ці величини відкладені на осі абсцис. Ординати кривої Гауса, що відповідають цим точкам, розділюють кожну половину площі під кривою на дві частини (рівні в випадку ординати, що відповідає ймовірній похибці η, і не рівні в випадках ординат, які відповідають ρ та σ). Внутрішня частина цієї площі (на рис. 2 вона заштрихована) показує, яка частина вимірювань із загального їх числа дала значення, що відрізняється від середнього арифметичного на величину *x*, меншу за η ($x \le \eta$, або $x \le \rho$, або $x \le \sigma$). Отже, ця площа показує, якою є ймовірність того, що похибка вимірювань менша або дорівнює η (або ρ, чи σ). При цьому треба мати на увазі, що загальна площа під кривою Гауса дорівнює 1. Величину такої ймовірності позначають α і називають *коефіцієнтом надійності або надійністю*. Коефіцієнт надійності для ймовірної похибки дорівнює 0,5, для середньої квадратичної ≈ 0,68, а для середньої арифметичної приблизно 0,57. Насправді за міру похибки можна вибрати любий інтервал значень ± *x*, але при цьому обов’язково треба вказати відповідний йому коефіцієнт надійності.

Зокрема, в низці випадків інтервал ±*x* беруть рівним 2σ, для якого α = 0,95. Слід зазначити, що сказане про зв'язок величин ρ, σ, η та α є справедливим у разі, коли кількість вимірювань досить велика. З серії *n* реальних вимірювань ми обчислюємо не точні значення ρ, σ та η, а лише їхні наближені значення σ_n, ρ_n, η_n, а значення α для тих же значень похибок зменшується із зменшенням числа *n*.

Якщо шукана величина вимірюється всього декілька разів, то про ступінь відхилення середнього арифметичного від істинного значення цієї величини можна оцінити лише за середньоквадратичною похибкою вимірювання, і саме вона визначає точність результата вимірювань. Якщо одна й та сама шукана величина визначалася багаторазово, то ступінь точності можна визначити значно точніше. Розрахуємо середню квадратичну похибку величини y, яка є сумою двох вимірюваних величин x_1, x_2: $y = x_1 + x_2$. Нехай було проведено n_1 вимірювань величини x_1 і n_2 вимірювань величини x_2. Величину y ми можемо обчислити із $n_1 \cdot n_2$ попарно взятих вимірювань величин x_1, x_2, тому її середня квадратична похибка буде:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\Delta y_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum(\Delta y_i)^2}{n_1 \cdot n_2}}. \tag{3.4}$$

Похибка кожного такого вимірювання буде дорівнювати сумі похибок кожної пари вимірювань. Тоді:

$$\sum_i(\Delta y_i)^2 = n_1 \sum_i(\Delta x_{1,i})^2 + n_2 \sum_i(\Delta x_{2,i})^2 + 2\sum_i \Delta x_{1,i} \sum_i \Delta x_{2,i}, \tag{3.5}$$

де $\Delta x_{1,i}$ та $\Delta x_{2,i}$ – повні абсолютні похибки вимірювань величин x_1, x_2, які отримані в результаті експерименту. Останній доданок є величиною нескінченно малою по відношенню до перших двох доданків, тому ними можна знехтувати. У цьому випадку дістаємо наближене значення для дисперсії, квадратний корінь із якої визначатиме середньоквадратичну похибку. Відкидаючи останній доданок у (3.5) і підставляючи цей вираз в (3.4), отримуємо:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 \sum \Delta x_1^2 + n_2 \sum \Delta x_2^2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{3.6}$$

Тут σ_1, σ_2 – середньоквадратичні похибки окремих вимірювань величин x_1, x_2. Тепер підрахуємо середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного значення величини. Нехай шукана величина вимірювалася *n* разів, $N_1, N_2, N_3, \ldots$ – результати її вимірювань, а σ – середньоквадратичне відхилення вимірювань. Середнє арифметичне значення шуканої величини можна подати як суму *n* членів, кожен з яких в *n* разів менший виміряного значення:

$$N = \frac{N_1}{n} + \frac{N_2}{n} + \frac{N_3}{n} + \cdots \ldots + \frac{N_n}{n}.$$

Середня квадратична похибка визначення кожної з цих величин, як видно, дорівнює σ/*n*, а середня квадратична похибка визначення середнього арифметичного згідно з формулою (3.6) буде такою:

$$\sigma_{\overline{N_0}} = \pm\sqrt{\frac{\sum \sigma^2}{n^2}} = \pm\sqrt{\frac{\sum(\Delta N)^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Аналогічно для ймовірної похибки отримуємо:

$$\eta_{\overline{N_0}} = \pm 0.6745\sqrt{\frac{\sum(\Delta N)^2}{n(n-1)}} = \frac{\eta}{\sqrt{n}}.$$

Кінцевий результат запишемо у вигляді:

$$N = N_0 \pm 0.6745\sqrt{\frac{\sum(\Delta N)^2}{n(n-1)}}, \quad (3.7)$$

де N_0 – середнє арифметичне всіх отриманих вимірювань. Такий запис означає, що істинне значення величини N лежить у межах, які визначаються отриманими за формулою (3.7) значеннями з імовірністю 50%.

Але треба пам'ятати, що все вище сказане дозволяє врахувати лише випадкові похибки вимірювань. За наявності систематичної похибки знаки ± вже не є рівноймовірними, а систематичні похибки автоматично увійдуть в отриманий результат N_0.

Ймовірність потрапляння в інтервал (z_1, z_2) графічно визначається як площа криволінійної трапеції, обмеженої функцією розподілу (3.1) (рис. 3.1). Ймовірність попадання випадкової похибки в симетричний інтервал ($-z_1$, z_1) при нормальному розподілі обчислюється за формулою:

$$p(-z_1 < z < z_1) = 2\Phi\left(\frac{z_1}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ називається – *інтегралом ймовірності,* значення якого відомі для різних значень співвідношень.

Повернемося знову до питання про грубу похибку (*промах*). Припускатимемо, що всі величини, які ми одержуємо в ході експерименту, описуються нормальним розподілом. Більш того, ми можемо оцінити величину σ. Тоді позначимо через x_* значення величини, яке перевищує всі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ решти результатів вимірювання. Знайдемо середнє арифметичне цих значень $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$ і складемо різницю $x_* - \bar{x}$, яку порівняємо з величиною $t = \frac{x_* - \bar{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$. Для отриманого значення підрахуємо ймовірність $1 - 2\,\Phi(t)$, де Φ(t) – інтеграл ймовірності, який відображає ймовірність того, що дане співвідношення випадково набуде значення, не менше ніж *t*, за умови, що значення x_* не містить грубої похибки. Якщо підрахована у такий спосіб ймовірність виявиться дуже малою, то дане значення є промахом і його треба виключити з обробки результатів вимірювань.

Розглянемо питання, яку саме ймовірність вважати малою. Якщо призначити дуже низький рівень малої ймовірності, то грубі помилки можуть залишитися, якщо ж узяти цей рівень невиправдано великим, то можна виключити результати з випадковими похибками, необхідні для правильної обробки результатів вимірювання. Звичайно застосовують один з трьох рівнів малої ймовірності: 5% рівень (виключаються похибки, ймовірність яких менше ніж 0,05); 1% рівень (виключаються похибки, ймовірність яких менше ніж 0,01); 0,1% рівень (виключаються похибки, ймовірність яких менше ніж 0,001). Підкреслимо, що вказаний метод застосовується тільки у тому випадку, коли величина σ точно відома.

Якщо нам не відоме точне значення σ, то цю величину можна оцінити по наближеній формулі, ґрунтуючись на експериментальних даних тобто:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

При цьому модуль різниці $x_* - \bar{x}$ (різниця між перевищуючим значенням x_* і середнім значенням $\bar{x}$ решти результатів) ділять на емпірично розраховану величину середнього квадратичного відхилення *s* $\left(t = \frac{|x_* - \bar{x}|}{s}\right)$ і порівнюють з критичними значеннями надійності. Якщо при даному *n* прийнятних результатів відношення знаходиться між двома критичними значеннями при надійностях P_1 та P_2 ($P_2 > P_1$), то можна вважати, що розглядувана величина містить грубу похибку і повинна бути вилучена з подальшої обробки.

3.2. Апроксимація. Метод найменших квадратів (МНК)

Один з найбільш загальних типів експериментів полягає у вимірюванні декількох значень двох різних фізичних величин для дослідження математичного зв'язку ними. Ймовірно, найбільш важливими експериментами такого типу є ті, де очікуваний зв'язок лінійний. У загальному випадку розглядатимемо будь-які дві фізичні змінні x та y, які пов'язані лінійною залежністю вигляду $y = kx + b$, де k та b – деякі сталі. Якщо дві змінні x та y пов'язані лінійною залежністю, то графік $y(x)$ повинен бути прямою лінією з нахилом k, яка перетинає вісь y в точці $k = b$. Якби ми виміряли N різних значень $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_N$ і відповідних їм значень $y_1, y_2, y_3, \ldots . y_N$, і якби результати наших вимірів не містили похибок, то кожна точка (x_i, y_i) лягла би точно на лінію $y = k\,x + b$, як це показано на рис. 3.3. На практиці ж завжди є похибки, і найбільше, на що ми можемо очікувати, – це те, що відстань від кожної точки (x_i, y_i) до лінії має бути порівняною з похибками, як показано на рис. 3.4. В даному випадку тільки значення величини y містять помітні похибки.

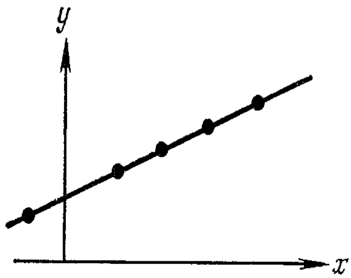


Рис. 3.3

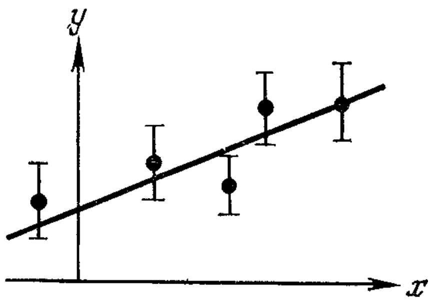


Рис. 3.4

Нехай в результаті вимірювань була отримана залежність однієї величини (y) від іншої (x) (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

x	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Необхідно знайти таку функцію $y = f(x)$, яка би відображала середнє значення з найменшою похибкою або, що те саме, з найменшою дисперсією. Згідно визначення, дисперсія є мірою розсіювання випадкової величини відносно середнього значення, аналітичний вираз якого ми й використовуємо у наступних формулах. Слід зауважити, що МНК, який дуже часто застосовується у різних експериментах, надає більш точне значення, коли кількість вимірів (точок апроксимації) більша за три. В інших випадках цей метод буде давати результат з великою похибкою.

а) *Лінійна залежність***.** Станемо шукати функцію $y = f(x)$ у вигляді:

$$y = f(x) = kx + b. \tag{3.8}$$

Згідно рис. 3.4 різниця між експериментальним значенням та середнім визначається у вигляді абсолютної різниці Δy_i та визначається наступним чином:

$$\Delta y_i = y_i - f(x_i) = y_i - (kx_i + b). \tag{3.9}$$

Використовуючи вираз (3.16), запишемо квадрати відхилень точок від положення рівноваги:

$$f = \sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))^2\ . \tag{3.10}$$

Згідно теорії МНК функція (3.10) – сума квадратів відхилення – повинна набувати мінімального значення. З іншого боку, ця функція набуває мінімального значення тоді, коли мінімальними є коефіцієнти k та b. Отже, задача зводиться до їх відшукання.

Як видно, вираз (3.9) є функцією з двома параметрами $f = f(k, b)$. Використаємо умову, необхідну для екстремуму:

$$\frac{\partial f(k,b)}{\partial k} = 0; \frac{\partial f(k,b)}{\partial b} = 0\ .$$

Тобто

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}{\partial k} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))^2}{\partial k} = 0\ ; \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}{\partial b} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))^2}{\partial b} = 0\ . \tag{3.12}$$

Розв’язавши систему двох рівнянь (3.11) та (3.12) з двома невідомими відносно параметрів k та b, отримаємо конкретний вигляд функції (3.8).

Опускаючи математичні викладки, запишемо вирази для шуканих параметрів:

$$k=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}\ ;\ b=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}y_i-k\sum_{i=1}^{n}x_i)\ . \qquad (3.13)$$

Розрахувавши величину σ, отримаємо значення середньоквадратичної похибки наближення найменших квадратів. При цьому знайдені значення k та b визначають точку екстремуму $\sigma = F(k, b)$.

*б) Степенева залежність***.** Станемо шукати функцію $y = f(x)$ у вигляді:

$$y = f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c. \qquad (3.14)$$

Аналогічно до першого випадку запишемо суму σ, яка в даному випадку є функцією трьох змінних:

$$\sigma=F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}((ax_i^2+bx_i+c)-y_i)^2\ .$$

Умови, необхідні для екстремуму цієї функції, наступні:

$$\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial a}=0;\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial b}=0;\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial c}=0\ .$$

За цими умовами складається система із трьох рівнянь з трьома невідомими, розв’язок якої дозволяє визначити коефіцієнти a, b та c:

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^3\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^4+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_i^3\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}x_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^3-\sum_{i=1}^{n}x_i^4(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-n(\sum_{i=1}^{n}x_i^3)^2}-$$

$$-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^2\sum_{i=1}^{n}y_i+(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i+n\sum_{i=1}^{n}x_i^3\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^4+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_i^3\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}x_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^3-\sum_{i=1}^{n}x_i^4(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-n(\sum_{i=1}^{n}x_i^3)^2};$$

(3.15)

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^3+\sum_{i=1}^{n}x_i^4\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i+(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^4+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_i^3\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}x_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^3-\sum_{i=1}^{n}x_i^4(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-n(\sum_{i=1}^{n}x_i^3)^2}-$$

$$
-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i + n\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i^3)^2};
$$

(3.16)

$$
c = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i^3)^2} -
$$

$$
-\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^3)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i^3)^2}.
$$

(3.17)

Приклад 1. Апроксимація лінійної експериментальної залежності МНК

У лабораторній роботі “Інтерференція світла. Кільця Ньютона” ставиться мета визначити радіус кривизни лінзи, за допомогою якої спостерігається інтерференційна картина, вимірявши діаметри утворених темних кілець Ньютона.

Радіус кривизни лінзи можна обчислити математично за допомогою формули

$$
R = \frac{D_k^2 - D_i^2}{4(k-i)\lambda},
$$

де D_k та D_i – діаметри темних кілець з порядковими номерами k та i; λ – довжина хвилі падаючого на лінзу світла. Такий самий результат дає і графічний розв’язок. Для цього потрібно побудувати графік залежності величини $(D_k^2 - D_i^2)$ від величини $4(k - i)\lambda$. Ця залежність є лінійною і описується рівнянням типу $y = kx + b$. Коефіцієнт k і є шуканим радіусом кривизни лінзи R.

Розглянемо графічний метод відшукання радіусу кривизни на прикладі.

Припустимо, в ході експерименту за довжини хвилі λ = 546 нм були виміряні діаметри шести перших темних кілець Ньютона (табл. 3.2). Спарувавши почергово перше темне кільце зі всіма іншими, отримаємо такі значення величин $(D_k^2 - D_i^2)$ та $4(k - i)\lambda$:

Таблиця 3.2

i- *k*	$4(k - i)\lambda \cdot 10^{-6}$, м	$(D_k^2 - D_i^2) \cdot 10^{-6}$, м
1-2	2,184	0,5531
1-2	4,368	1,122
1-4	6,552	1,586
1-5	8,736	2,0819
1-6	10,92	2,489

Наносимо отримані експериментальні точки на графік (рис. 3.5). Враховуючи вигляд залежності $(D_k^2 - D_i^2)$ від $4(k - i)\lambda$, її дійсно можна апроксимувати прямою типу $y = kx + b$. При цьому значення коефіцієнтів k та b розраховуються за допомогою МНК за формулами (3.13). Зробивши відповідні математичні розрахунки, отримуємо: $k = 0{,}221$; $b = 0{,}117$. Побудуємо апроксимаційну пряму $y = 0{,}221x + 0{,}117$ (рис. 3.5, суцільна пряма). Шуканий радіус кривизни лінзи, як зазначалося вище, буде дорівнювати коефіцієнту k, тобто $R = 0{,}221$ м.

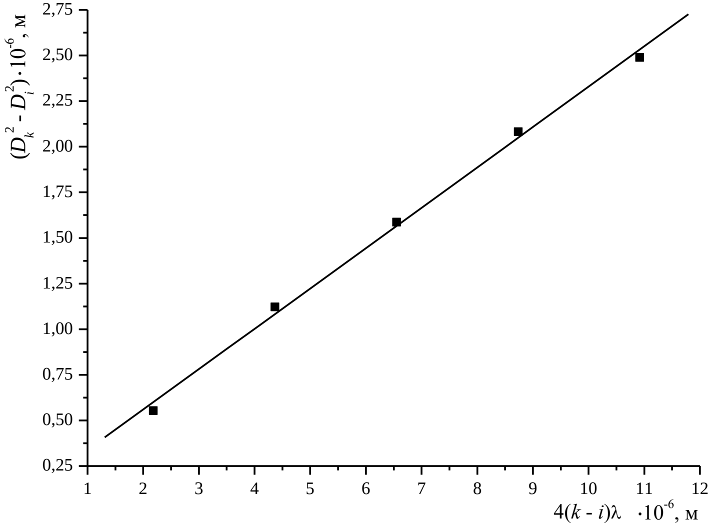


Рис.3.5

Приклад 2. Апроксимація степеневої експериментальної залежності МНК

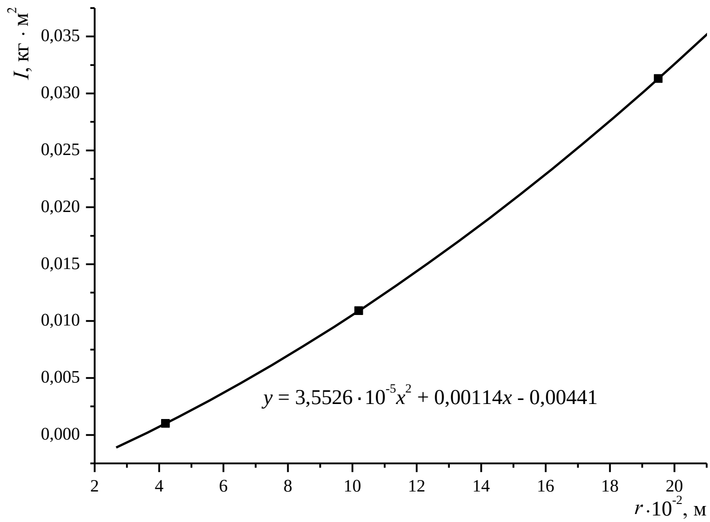


Рис. 3.6.

В лабораторній роботі "Визначення моменту інерції системи тіл, що обертаються" треба побудувати графік залежності величини моменту інерції (I) системи від відстані (r), на якій знаходяться тягарці відносно осі обертання. Відомо, що така залежність задається квадратичною функцією $I = mr^2$.

На основі отриманих експериментальних даних (табл. 3.3) було побудовано експериментальний графік (рис.3.6).

Таблиця 3.3.

Номер досліду	Відстань до осі обертання, r, м · 10^{-2}	Момент інерції, I, кг · м^2
1	4,2	0,001
2	10,2	0,0109
3	19,5	0,0313

Так як залежність є степеневою, то її можна апроксимувати функцією вигляду (3.14). Підставляючи експериментальні дані в формули (3.15)-(3.17), знаходимо значення коефіцієнтів: a = $3,5526 \cdot 10^{-5}$; b = 0,00114; c = -0,00441. Відповідно, апроксимаційна крива буде задаватися рівнянням: $y = 3{,}5526 \cdot 10^{-5} x^2 + 0{,}00114x - 0{,}00441$ (рис. 3.6).

З огляду на те, що розрахувати необхідні апроксимаційні параметри досить складно, доцільно використовувати для цього спеціальне програмне забезпечення, наприклад, графічну програму Microcal Origin тощо. Деякі застосування цієї програми описані в «Додатках» методичних вказівок.

3.3.Перевірка гіпотези про нормальний розподіл експериментальних даних

Як правило, випадкові величини, якими є і результати вимірювань у лабораторних роботах, підпорядковані до нормального розподілу. Виходячи з цього, вибирають критерії для перевірки, чи справджується ця гіпотеза в кожному конкретному випадку. Одним з основних таких критеріїв являється *критерій Пірсона*, перевагами якого є його універсальність, а також те, що він визначає, чи описується нормальним розподілом сукупність вимірів у цілому. Нижче розглянуто алгоритм перевірки набору даних на нормальний розподіл із застосуванням критерію Пірсона.

Нехай у результаті експерименту отримано вибірку даних досить великого об'єму n з великою кількістю різних значень. Для зручності її обробки розділимо інтервал від найменшого до найбільшого значення на s рівних частин, і вважатимемо, що ті значення, що потрапили в кожен інтервал, приблизно дорівнюють числу, яке задає середину інтервалу. Підрахувавши кількість значень, які потрапили в кожний інтервал, складемо так названу згруповану вибірку:

значення $x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_s$;
частоти $n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_s$,

де x_i – значення середин інтервалів, а n_i – кількість значень, що потрапили в i-й інтервал (так звані експериментальні частоти).

За отриманими даними можна обчислити вибіркове середнє $\overline{x_B}$ (середнє арифметичне) і вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B (середньоквадратичну похибку). Перевіримо припущення, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом з параметрами $M(x)=\overline{x_B}$, $D(x)=\overline{\sigma_B^2}$. Де $M(x)$ – математичне очікування, $D(x)$ – дисперсія, які дорівнюють середньому квадратичному та середньоквадратичній похибці відповідно. Тоді можна знайти кількість чисел з вибірки об'ємом n, які повинні знаходитися в кожному інтервалі за цього припущення (тобто теоретичні частоти). Для цього по таблиці значень функції Лапласа знайдемо ймовірність попадання в i-й інтервал:

$$p_i = \Phi\left(\frac{b_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right),$$

де a_i і b_i – межі i-го інтервалу. Помноживши отриману ймовірність на об'єм вибірки n, знайдемо теоретичні частоти: $n_i = n \cdot p_i$. Наша мета – порівняти експериментальні та теоретичні частоти, які, звичайно, відрізняються одна від одної, і з'ясувати, чи є ці відмінності несуттєвими та чи не спростовують гіпотезу про нормальний розподіл досліджуваної випадкової величини, або ж вони настільки великі, що суперечать цій гіпотезі. Для цього використовується критерій у вигляді випадкової величини:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}},$$

в якій підсумовуються частини, які складають квадрати відхилень експериментальних від відповідних теоретичних частот. Для вибраного критерію будується правостороння критична область, що визначається умовою:

$$p(\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)) = \alpha,$$

де α – рівень значущості, k – кількість ступенів вільності. Критична область задається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, а область прийняття гіпотези - $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$.

Отже, для перевірки гіпотези про те, що генеральна сукупність розподілена нормально, треба обчислити по вибірці спостережуване значення критерію:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}},$$

а по таблиці критичних точок розподілу χ^2 знайти критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, використовуючи відомі значення α і *k*. Якщо $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – гіпотезу приймають, при $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ її відкидають.

Розглянемо спрощений випадок застосування критерію Пірсона для перевірки випадкових величин на нормальний розподіл на конкретному прикладі. В лабораторній роботі "Дослідження розподілу випадкових величин. Визначення прискорення вільного падіння" проводяться вимірювання 50-ти значень часу, що відповідає декільком (3-5) коливанням математичного маятника.

Для того, щоб перевірити отримані експериментальні дані на нормальний розподіл, застосовується спрощена схема перевірки:

1. Записати до першого стовпчика табл. 3.4 значення часу t_i з номерами $\geq n/2$ (n – загальна кількість вимірювань, тобто, 50) в порядку їх зростання.

2. Розрахувати значення густини розподілу X_i за формулою:

$$X_i = \frac{i}{n+1},$$

Здобуті результати занести в другий стовпчик табл. 3.4.

3. За табл. 5 визначити значення функції Y_i для відповідних значень густини розподілу X_i. Здобуті результати занести в табл.4 в третій стовпчик.

4. Нанести значення Y_i та t_i на графік та апроксимувати їх прямою лінією, тобто провести пряму так, щоб точки розташовувалися по можливості по обидві боки від прямої на однаковій відстані від неї, так, як це показано на рис.7. За відсутності систематичного відхилення точок відносно прямої, можна зробити висновок про відповідність виміряних значень нормальному закону розподілу.

Таблиця 3.4.

№ з/п	t_i	X_i	Y_i	№	t_i	X_i	Y_i
1	12,43	0,4902	0	14	12,74	0,7451	0,674
2	12,51	0,5098	0,025	15	12,76	0,76471	0,706
3	12,56	0,52941	0,075	16	12,76	0,78431	0,772
4	12,56	0,54902	0,125	17	12,77	0,80392	0,841
5	12,62	0,56863	0,176	18	12,78	0,82353	0,915
6	12,63	0,58824	0,227	19	12,79	0,84314	0,994

7	12,65	0,60784	0,279	20	12,8	0,86275	1,0803
8	12,65	0,62745	0,331	21	12,83	0,88235	1,174
9	12,68	0,64706	0,385	22	12,84	0,90196	1,281
10	12,69	0,66667	0,439	23	12,87	0,92157	1,405
11	12,7	0,68627	0,495	24	12,91	0,94118	1,554
12	12,71	0,70588	0,553	25	12,92	0,96078	1,75
13	12,73	0,72549	0,612	26	12,98	0,98039	2,053

Таблиця 3.5.

X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
0,50	0,00000	0,69	0,49585	0,88	1,17499	0,981	2,07486
0,51	0,02507	0,70	0,52440	0,89	1,22653	0,982	2,09693
0,52	0,05015	0,71	0,55339	0,90	1,28155	0,983	2,12007
0,53	0,07527	0,72	0,58284	0,91	1,34076	0,984	2,14441
0,54	0,10043	0,73	0,61281	0,92	1,40507	0,985	2,17009
0,55	0,12566	0,74	0,64335	0,93	1,47579	0,986	2,19729
0,56	0,16097	0,75	0,67449	0,94	1,55477	0,987	2,22621
0,57	0,17637	0,76	0,70630	0,95	1,64485	0,988	2,25713
0,58	0,20189	0,77	0,73885	0,96	1,75069	0,989	2,29037
0,59	0,22756	0,78	0,77219	0,971	1,89570	0,990	2,32635
0,60	0,25335	0,79	0,80642	0,972	1,91104	0,991	2,36562
0,61	0,27932	0,80	0,84162	0,973	1,92684	0,992	2,40892
0,62	0,30548	0,81	0,87790	0,974	1,94313	0,993	2,45726
0,63	0,33185	0,82	0,91537	0,975	1,95996	0,994	2,51211
0,64	0,35846	0,83	0,95417	0,976	1,97737	0,995	2,57383
0,65	0,38532	0,84	0,99446	0,977	1,99589	0,996	2,65207
0,66	0,41246	0,85	1,03648	0,978	2,01409	0,997	2,74778
0,67	0,43991	0,86	1,08032	0,979	2,03352	0,998	2,87816
0,68	0,46767	0,87	1,12639	0,980	2,05375	0,999	3,09023

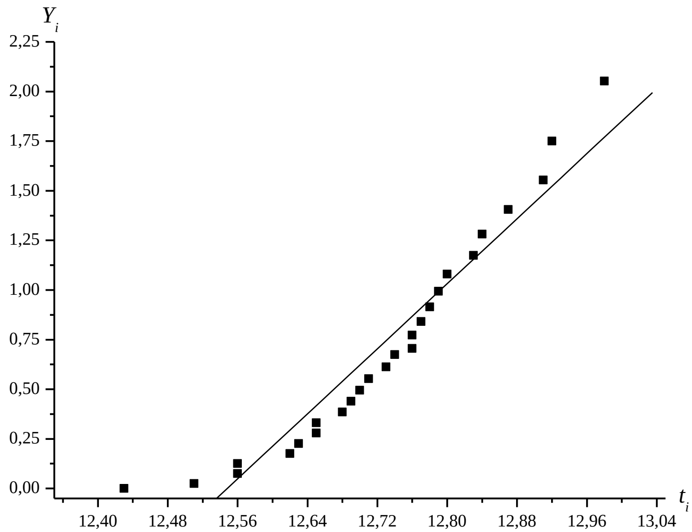


Рис.3.7

3.4. Інтерполяція

Проводячи розрахунки в лабораторних роботах, як правило, доводиться оперувати наборами експериментально отриманих значень (x_1, x_2, ..., x_n). На підставі цих наборів потрібно побудувати функцію $y = f(x)$, зі значеннями якої могли б з високою точністю збігатися інші отримувані значення. *Інтерполяцією* в такому випадку називається знаходження проміжних значень величини за наявним дискретним набором відомих значень і побудова за цими значеннями апроксимаційної функції. При цьому кожному значенню x_1, x_2, ..., x_n буде відповідати конкретне значення y_1, y_2, ..., y_n.

Практично вигляд функції $y = f(x)$ може бути невідомим або мати досить складний вигляд, тому безпосередні обчислення її для тих значень x, що лежать в інтервалі від x_1 до x_n, є ускладненими. Метод інтерполяції, що використовується в подібних ситуаціях, в загальному випадку полягає в наступному.

Функцію $f(x)$ замінюють на таку наближену спрощену функцію $\varphi(x)$, для якої при значеннях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задовольнялася би умова: $y_1 = f(x_1) = \varphi(x_1)$; $y_2 = f(x_2) = \varphi(x_2)$;…$y_n = f(x_n) = \varphi(x_n)$.

В цьому випадку функцію $\varphi(x)$ називають *інтерполюючою* або *апроксимуючою функцією*. Розглянемо найпростіші види інтерполяції: лінійну та графічну.

а) *Лінійна інтерполяція*. Нехай існує набір величин (x_1, x_2), яким відповідають значення величин (y_1, y_2). Нам необхідно знайти значення величини y_0, що відповідає такому значенню x_0, яке лежить в межах $x_2 > x_0 > x_1$.

Припускаючи, що в інтервалі $x_1 - x_2$ зміна величини y пропорційна зміні величини x, і є лінійною, можна скласти пропорцію:

$$\frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}.$$

Звідки отримуємо:

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1)\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}.$$

Такою інтерполяцією зазвичай користуються в таких випадках: при роботі з таблицями величин, коли треба знайти значення, що не містяться в таблиці (наприклад, при визначенні логарифмів нецілих чисел або при визначенні поверхневого натягу води при певній заданій температурі, коли відомими є значення поверхневого натягу для дискретного набору температур), при роботі з приладами, коли складно підібрати умови експерименту, що точно узгоджуються з метою дослідження (наприклад, коли треба визначити значення струму при певному опорі, а опір на реостаті змінюється не плавно).

б) *Графічна інтерполяція*. На практиці часто користуються графічною інтерполяцією, яку можна використовувати і тоді, коли між фізичними величинами не зберігається лінійна залежність. На точно виконаному графіку безпосередньо відраховують за масштабом значення однієї величини при потрібному значенні іншої.

Графічною інтерполяцією можна користуватися при досить складній залежності величини, однак, потрібно мати на увазі, що така інтерполяція дає обмежену точність у випадках, коли експериментальна крива має чітко виражені максимуми та мінімуми.

Приклади використання лінійної та графічної інтерполяції наведені у попередньому пункті.

ДОДАТОК

Наближені обчислення

Точність обчислень результатів вимірювання має відповідати точності вимірювань. Виконувати обчислення з точністю більшою, ніж це дозволяють експериментальні дані, нераціонально. Надмірна «точність» обчислень призводить до некорисного, зайвого витрачання часу і, крім того, створює хибне враження про велику точність вимірювань.

Обчислення, які виконуються при математичній обробці результатів вимірювання фізичних величин, є наближеними.

Загальновживаний запис десяткових чисел називається *природною формою запису чисел.* Досить часто у фізиці, астрономії числа записують як добуток двох співмножників, перший з яких – деяке число в природній формі, а другий – відповідний степінь десяти. Наприклад, 299792458 м/с – швидкість світла у вакуумі; $6{,}0221367\ (36) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – стала Авогадро (цифри в дужках тут означають абсолютну похибку, виражену в десяткових частках, і відповідають двом останнім знакам числового значення константи); наприклад, стала Авогадро $(6{,}0221367 \pm 0{,}0000036) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Такі записи спрощують природну форму запису «довгих» чисел.

У зв'язку із застосуванням обчислювальної техніки використовується ще одна форма запису чисел – нормалізована.

Нормалізованою формою запису числа (або нормалізованим числом) називається запис числа у вигляді добутку правильного десяткового дробу (з відмінною від нуля першою цифрою після коми) і степеня десяти. Наприклад: $-596{,}31 = -0{,}59631 \cdot 10^{+3}$; $2{,}894 = 0{,}2894 \cdot 10^{+1}$.

Дробова частина нормалізованого числа, взята з відповідним знаком, називається *мантисою числа,* а показник степеня із своїм знаком – *порядком числа.*

У наближених обчисленнях записи 25,6 і 25,600 відрізняються один від одного. В числі 25,6 правильні лише цифри цілих і їхні десяті частини, а в числі 25,600 також соті і тисячні частини.

Прийнято вважати, що k-та цифра наближеного числа *а правильна,* якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці k-го розряду. Всі цифри, які стоять лівіше від правильної, також правильні. У протилежному випадку цифру k-го розряду називають *сумнівною.* Сумнівна цифра стоїть безпосередньо за крайньою справа правильною цифрою.

Продовження додатка

Усі правильні цифри числа, починаючи з першої зліва, відмінної від нуля, і включаючи першу сумнівну цифру, називаються *значущими цифрами.* Всі інші цифри називаються *незначущими.* Наприклад, у числі 0,0507 три значущих цифри; перші два нулі незначущі, нуль між п'ятіркою і сімкою – значущий.

Записуючи остаточні результати наближених обчислень, незначущі цифри числа відкидають. У числі 2500 – чотири значущі цифри (нулі в числі 2500 – значущі цифри, точно відомо, що одиниць і десятків у числі 2500 немає). Запис $47200 \cdot 10^3$ або $0{,}47200 \cdot 10^8$ означав, що в числі 47 200 000 три останні цифри незначущі, а всі інші – значущі.

Запис результатів має відповідати також точності вимірювання. Наприклад, якщо товщина пластинки після обчислень становить 4,5568 мм при абсолютній похибці вимірювання 0,02 мм, то такий запис числа не відповідає теорії похибок вимірювання. Середнє арифметичне значення для товщини пластинки в цьому разі слід округлити до 4,56 мм.

Взагалі при округленні наближеного або точного числа a до n значущих цифр за правилом доповнення число a замінюють числом a_1 з n значущими цифрами так, щоб похибка округлення не перевищувала одиниці розряду, що зберігається, тобто щоб

$$\left|a_1 - a\right| \le \frac{1}{2} 10^{m-n+1}.$$

При цьому прийнято, що будь-яке додатне наближене число a у довільній системі числення можна подати у вигляді скінченного дробу

$$a = d_1 \cdot 10^m + d_2 10^{m-1} + \ldots + d_n 10^{m-n+1},$$

де символом 10 зображено основу g системи числення, $0 \le d_i < g$ (*i*= *1, 2, ...).* У десятковій системі (g = 10) коефіцієнти d_i зображуються символами 0, 1, 2, …, 9.

Якщо з наближеними числами ще проводитимуться обчислення, то в них слід зберігати одну або дві сумнівні цифри.

Виконуючи математичні операції над наближеними числами, слід додержувати таких правил.

1. Наближені числа треба округляти перед виконанням відповідних математичних операцій. Округляти числа слід за наведеним вище правилом до розряду найменш точного числа, залишаючи в числах одну або дві запасні

цифри. Це дає змогу цілком правильно округлити кінцевий результат. У кінцевому результаті ці «запасні» цифри відкидають.

2. При додаванні і відніманні наближених чисел кінцевий результат

Продовження додатка

слід округляти так, щоб у ньому не було значущих цифр у тих розрядах, яких немає хоча б в одному з наближених чисел. Наприклад: $5{,}962 + 2{,}49 + 7{,}18376 + 6{,}1468 \approx 5{,}962 + 2{,}49 + 7{,}184 + 6{,}147 = 21{,}783 \approx 21{,}78$.

3. При множенні і діленні наближених чисел у кінцевому результаті слід залишити стільки значущих цифр, скільки їх є в наближеному числі з найменшою кількістю значущих цифр. Наприклад: $3{,}624 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}1127 \approx 3{,}62 \cdot 2{,}4 \times 5{,}11 = 8{,}688 \approx 8{,}7$.

4. При піднесенні до степеня у кінцевому результаті слід залишати стільки значущих цифр, скільки їх має наближене число, яке підноситься до степеня. Наприклад: $1{,}26^2 = 3{,}276 \approx 3{,}28$.

5. При добуванні коренів у кінцевому результаті слід залишити стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневе наближене число. Наприклад: $\sqrt{2{,}29} \approx 1{,}513 \approx 1{,}51$

6. Знаходячи логарифм наближеного числа, потрібно брати з таблиць для мантиси стільки значущих цифр, скільки їх має це число. Наприклад: $\lg 77{,}23 \approx 2{,}8878 \approx 2{,}888$. Правильне і обернене твердження: число, яке знаходять за логарифмом, повинно мати стільки значущих цифр, скільки їх у мантиси (при довільній характеристиці).

7. Слід пам'ятати такі наближені рівності ($a \ll 1$):

$$(1 \pm a)^2 \approx 1 \pm 2a; \quad (1 \pm a)^3 \approx 1 \pm 3a;$$

$$\sqrt{1 \pm a} \approx 1 + \frac{a}{2}; \quad \sqrt[3]{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{a}{3}.$$

Використання можливостей програми Microcal Origin 7.0 для аналізу і візуалізації експериментальних даних

Відомо, що графіки і діаграми дають практично повну інформацію про фізичні процеси. Важко навести приклади типових лабораторних робіт з курсу загальної фізики, які б не мали завдання з графічного зображення експериментально отриманих результатів з подальшим порівнянням, наприклад, з відомою теоретичною залежністю для заданих фізичних величин. На відміну від відомих продуктів *Mathematica*, *MathCAD*, *Map*le, *MathLab* основне призначення *Microcal Origin* (версія 7) – графічне відображення даних (хоча в ньому є вбудована мова програмування і можливість проводити обчислення усередині таблиць). Отримані з його допомогою графіки і діаграми придатні для поліграфії, презентацій, інтернету тощо. За допомогою цього програмного середовища реалізовується можливість на основі рівнянь або даних, що зберігаються у файлі, побудови

Продовження додатка

графіка (двох або тривимірного), можна здійснити перетворення Фур'є, згладжування, статистичний аналіз наявної інформації. Пакет дозволяє легко і повноцінно оформити атрибути графіка, наприклад, властивості лінії графіка (точки не сполучені; сполучені прямими лініями; графік може бути розбитий на ділянки по три точки; по точках може бути проведена апроксимуюча їх лінія з урахуванням або без розкиду; точки з'єднуються східчастими лініями тощо).

Розглянемо використання деяких можливостей *Microcal Origin* 7 в процесі виконання типової лабораторної роботи «Дослідження вольт-амперної характеристики фотоелемента. Визначення сталої Планка методом затримуючого потенціалу».

Отже, у ході реального експерименту студентом були отримані залежності $I = f(U)$ для різних світлофільтрів із заданими довжинами хвиль λ. Наведемо, наприклад, відповідні результати для оранжевого світлофільтра ($\lambda = 600$ нм). Можливості *Microcal Origin* дають можливість легко копіювати робочі сторінки програми (таблиці даних, графіки, діаграми тощо) правою клавішею «миші» і стандартно вставляти ці об'єкти в файли *Microsoft Word*. Маємо таблицю, що містить по три виміри значення сили фотоструму *I* (мкА) для області від'ємних значень напруги *U* (В), що необхідні для знаходження значення затримуючої напруги $U_з$. Підпис до стовпчика задається в текстовому полі подвійним клацанням «мишею» на заголовку. Меню, що при цьому випадає, подано на рис. Д.1.

Програма дає можливість провести аналіз отриманих результатів по колонках і рядках за допомогою опції головного меню *Statistics*, в результаті чого в додатковому вікні виникає таблиця із значеннями середнього арифметичного *mean*, абсолютних похибок *sd*, *se*[4], максимального і мінімального значення величини тощо. Шляхом звичайного копіювання стовпчика переносимо середнє арифметичне значення сили струму в першу таблицю, а також середню квадратичну похибку (рис. Д2).

Побудова графіка починається з пункту меню *Plot*. Кількість можливих варіантів вражає (рис. Д.3). Меню *Line* дає можливість вказати роль, яку будуть відігравати окремі стовпчики в створюваному малюнку,

[4] *Sd* (Standard deviation); $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$; *Se* (Standard error), $Se = \frac{Sd}{\sqrt{n}}$

а також вказати дані, що будуть виступати як похибки *yEr* або *xEr* (рис. Д.4). В нашому випадку врахуємо тільки похибку по осі *Y*.

При цьому в *Microcal Origin* існує можливість правильно провести лінію через області експериментальних даних з урахуванням інтерполяції. Отже, виберемо пункти *Plot/Special-Symbol/Spline*. Отримуємо графік з похибками (рис. Д.5).

Подвійним клацанням графік відкривається для редагування. Обираємо тип ліній, розміри і тип експериментальних точок (рис. Д.6). Зміну масштабу, початку відліку, типу штрихування шкали, підписи та інше змінюємо клацнувши безпосередньо в полі рисунка по осях (рис. Д.7).

Подібним способом можна побудувати вольт-амперні характеристики для кількох світлофільтрів. Після чого звести отримані дані в таблицю для побудови залежності $U_з = f(\nu)$ і в описаний вище спосіб отримати графічне зображення експериментальних результатів цієї частини роботи (рис. Д.8).

У середовищі *Microcal Origin* є майстер побудови інтерполюючої функції, де можна підібрати певну функцію. Для цього обираються пункти меню *Analysis/Non-linear Curve Fit/Fitting Wizard*. У вікні, що з'явилося за допомогою кнопок *Next* і *Back* є можливість покроково побудувати функцію, яка найбільш точно буде підходити для отриманих даних (рис. Д.9). Для побудови лінійної залежності можна також скористатися апроксимацією методом найменших квадратів. Для цього виділяємо дані таблиці і вибираємо пункти меню *Tools/Linear Fit*. Після застосування цих дій в полі з'являється графік і додаткове вікно внизу сторінки, де підібрано коефіцієнти A і B лінійної залежності $y = A + Bx$ (рис. Д.9). За тангенсом кута нахилу (коефіцієнтами A і B) за відомими залежностями можна визначити значення сталої Планка, що є одним із пунктів мети даної лабораторної роботи. Слід зазначити, що *Microcal Origin* підтримує велику кількість типів тривимірних (3*D*) графіків (наприклад, лінії в просторі або векторні поля).

Можна також перевірити отримані дані на нормальність розподілу. Для цього виділяємо стовпчик з цифрами, обираємо опції statistics ->descriptive statistics->normality test. Серед чисел, що з'являться внизу знаходимо W і його значення. Наприклад, 0,947. Це означатиме, що даний розподіл буде нормальним з імовірністю 0,947 за критерієм Шапіро-Уілка [5].

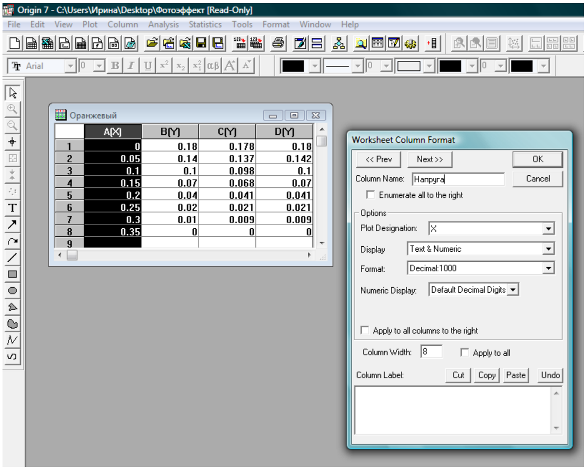
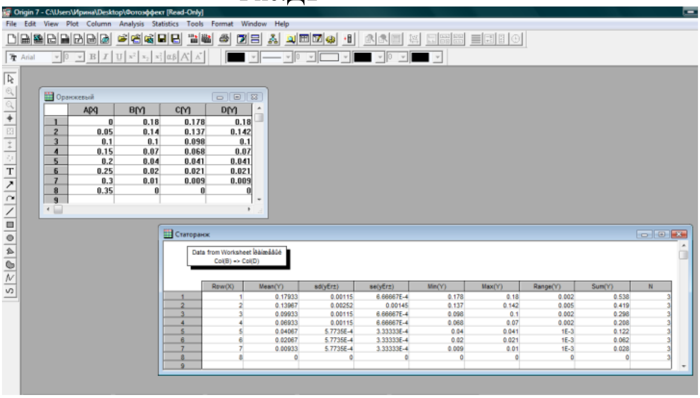

Origin 7 - C:\Users\Ирина\Desktop\Фотоэффект [Read-Only]
File Edit View Plot Column Analysis Statistics Tools Format Window Help
Оранжевый
A(X) B(Y) C(Y) D(Y)
1 0 0.18 0.178 0.18
2 0.05 0.14 0.137 0.142
3 0.1 0.1 0.098 0.1
4 0.15 0.07 0.068 0.07
5 0.2 0.04 0.041 0.041
6 0.25 0.02 0.021 0.021
7 0.3 0.01 0.009 0.009
8 0.35 0 0 0
9
Worksheet Column Format
<< Prev
Next >>
OK
Cancel
Column Name: Напруга
Enumerate all to the right
Options
Plot Designation: X
Display Text & Numeric
Format: Decimal:1000
Numeric Display: Default Decimal Digits
Apply to all columns to the right
Column Width: 8
Apply to all
Column Label: Cut Copy Paste Undo

Рис.Д1


Origin 7 - C:\Users\Ирина\Desktop\Фотоэффект [Read-Only]
File Edit View Plot Column Analysis Statistics Tools Format Window Help
Оранжевый
A(X) B(Y) C(Y) D(Y)
1 0 0.18 0.178 0.18
2 0.05 0.14 0.137 0.142
3 0.1 0.1 0.098 0.1
4 0.15 0.07 0.068 0.07
5 0.2 0.04 0.041 0.041
6 0.25 0.02 0.021 0.021
7 0.3 0.01 0.009 0.009
8 0.35 0 0 0
9
Статоранж
Col(B) => Col(D)
Row(X) Mean(Y) sd(yErr±) se(yErr±) Min(Y) Max(Y) Range(Y) Sum(Y) N

РисД2

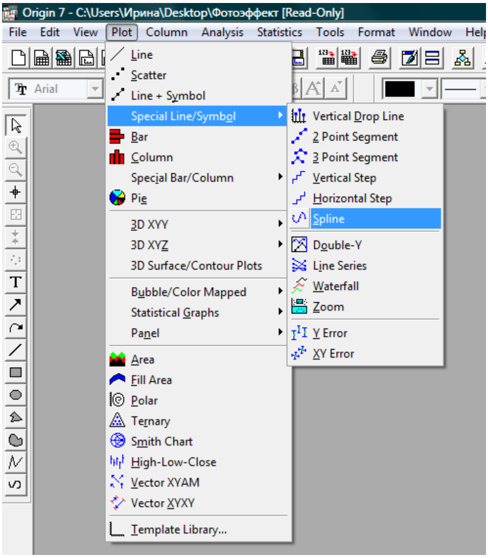

Origin 7 - C:\Users\Ирина\Desktop\Фотоэффект [Read-Only]
File Edit View Plot Column Analysis Statistics Tools Format Window Help
Line
Scatter
Line + Symbol
Special Line/Symbol
Bar
Column
Special Bar/Column
Pie
3D XYY
3D XYZ
3D Surface/Contour Plots
Bubble/Color Mapped
Statistical Graphs
Panel
Area
Fill Area
Polar
Ternary
Smith Chart
High-Low-Close
Vector XYAM
Vector XYXY
Template Library...
Vertical Drop Line
2 Point Segment
3 Point Segment
Vertical Step
Horizontal Step
Spline
Double-Y
Line Series
Waterfall
Zoom
Y Error
XY Error

Рис.Д3

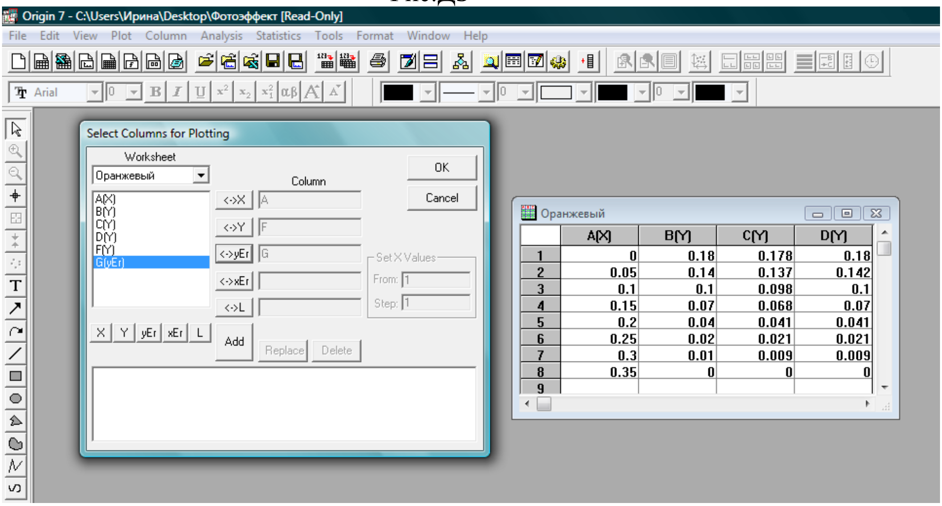

Origin 7 - C:\Users\Ирина\Desktop\Фотоэффект [Read-Only]
File Edit View Plot Column Analysis Statistics Tools Format Window Help
Select Columns for Plotting
Worksheet
Оранжевый
A(X)
B(Y)
C(Y)
D(Y)
F(Y)
G(yEr)
Column
<->X
<->Y
<->yEr
<->xEr
<->L
OK
Cancel
Set X Values
From:
Step:
Add
Replace
Delete
Оранжевый
A(X) B(Y) C(Y) D(Y)
1 0 0.18 0.178 0.18
2 0.05 0.14 0.137 0.142
3 0.1 0.1 0.098 0.1
4 0.15 0.07 0.068 0.07
5 0.2 0.04 0.041 0.041
6 0.25 0.02 0.021 0.021
7 0.3 0.01 0.009 0.009
8 0.35 0 0 0

Рис.Д4

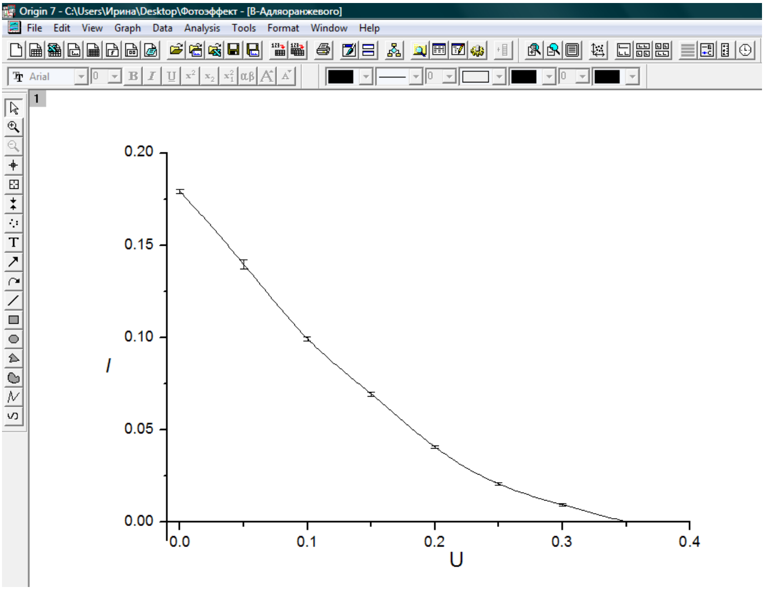

Origin 7 - C:\Users\Ирина\Desktop\Фотоэффект - [B-Адляоранжевого]
File Edit View Graph Data Analysis Tools Format Window Help
Arial
1
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
I
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
U

Рис.Д5

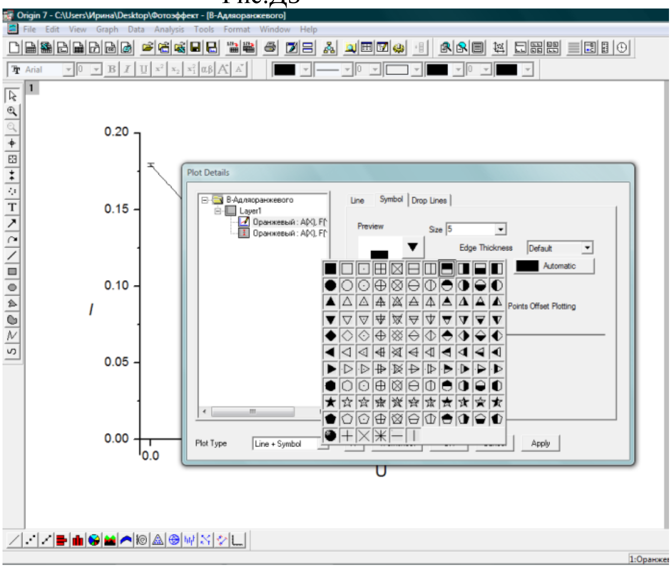

Origin 7 - C:\Users\Ирина\Desktop\Фотоэффект - [B-Адляоранжевого]
File Edit View Graph Data Analysis Tools Format Window Help
Arial
1
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
I
0.0
U
Plot Details
B-Адляоранжевого
Layer1
Line
Symbol
Drop Lines
Preview
Size
5
Edge Thickness
Default
Automatic
Points Offset Plotting
Plot Type
Line + Symbol
Apply

Рис.Д6

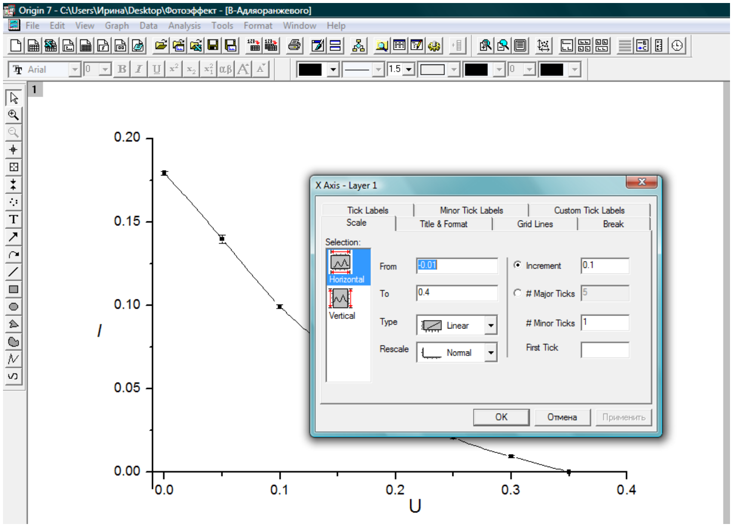


Рис.Д7

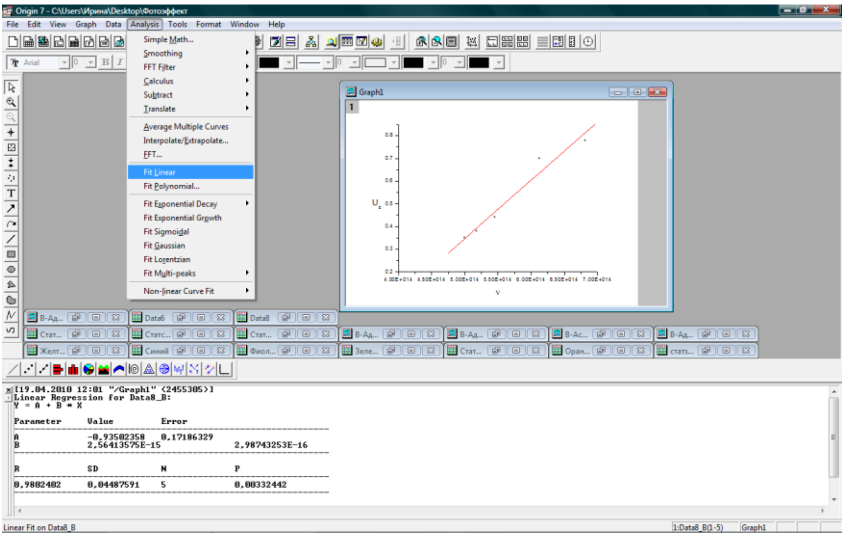


Рис.Д8

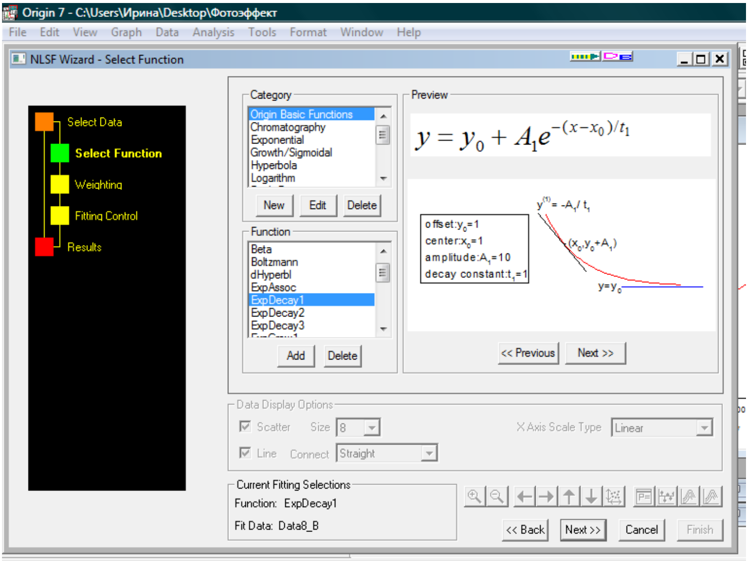


Рис.Д9

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурдун Г.Д. Основы метрологии / Г.Д. Бурдун, Б.Н. Марков. – М.: Издательство стандартов, 1972, – 318 с.
2. ДСТУ 2708:2006. Метрология. Поверка средств измерительной техники. Организация и порядок проведения [Електронний ресурс]: Хранилище стандартов – 2009. – Режим доступу до журн.: http://normativ.ucoz.org/load/3-1-0-43. – Назва з екрану.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику / Р.П. Федоренко. – М.: Издательство МФТИ, 1994, – 528с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987, – 600с.
5. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента / Л.З. Румшиский. – М.: Наука, 1971, – 192с.
6. Хемминг Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1972, – 400с.

7. Барановський В.М. Загальна фізика: Лабораторний практикум.: Навч.посібник / В.М. Барановський, П.В. Бережний, І.Т. Горбачук та ін. – К.:Вища шк., 1992.
8. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистичская обработка его результатов / В.Н. Лавренчик. – М.: Высш. шк, 1986.
9. Кучерук І.М. Обробка результатів фізичних вимірювань / І.М. Кучерук, В.П. Дущенко, В.М. Андріанов. – К.: Вища шк., 1981.
10. Крылов В.И. Вычислительные методы. Т.1 / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, 1976, – 302с.
11. Крылов В.И. Вычислительные методы. Т.2 / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, 1977, – 400с.
12. Березин И.С. Методы вычислений. Т.1 / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Наука, 1966, – 632с.
13. Березин И.С. Методы вычислений. Т.2 / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Наука, 1967, – 640с.
14. Агекян Т.А. Теория вероятностей для астрономов и физиков / Т.А. Агекян. – М.: Наука, 1974, – 264с.
15. Соболь И.М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболь. – М.: Наука, 1968, – 64с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛАВАНОВ Геннадій Юрійович
БОРДЮГ Ганна Борисівна
СЛІПУХІНА Ірина Андріївна

ФІЗИКА. ТЕОРІЯ ПОХИБОК

Лабораторний практикум для студентів технічних спеціальностей.

Редактор
Коректор
Верстка